

Họ và tên thí sinh: Số báo danh: Mã đề 0104

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(2; 1; -4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z - 7 = 0$ có phương trình là

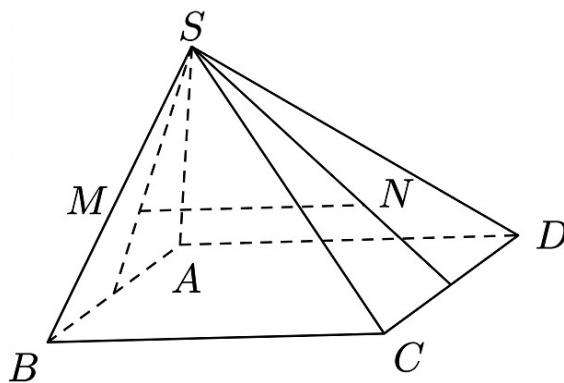
A. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 25$

B. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 25$

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 25$

D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 25$

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (tham khảo hình bên dưới). Gọi M, N theo thứ tự là trọng tâm tam giác SAB và tam giác SCD . Khi đó MN song song với mặt phẳng nào sau đây?



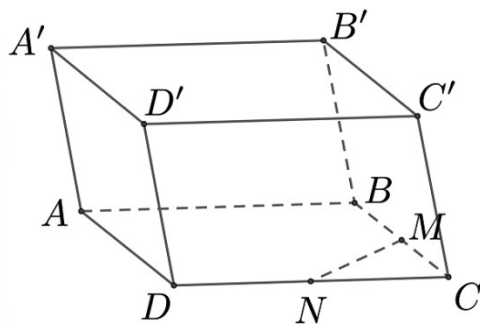
A. (SAB)

B. $(ABCD)$

C. (SBD)

D. (SAC)

Câu 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình bên dưới). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và CD . Vector nào sau đây bằng $2\overrightarrow{MN}$?



A. $\overrightarrow{BC}$

B. $\overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{A'C'}$

D. $\overrightarrow{B'D'}$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x + 5y - 2z - 2 = 0$ song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $x + 5y - 2z - 2 = 0$

B. $x - 5y + 2z + 2 = 0$

C. $2x + 10y - 4z + 1 = 0$

D. $-x - 5y - 2z + 2 = 0$

Câu 5. Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

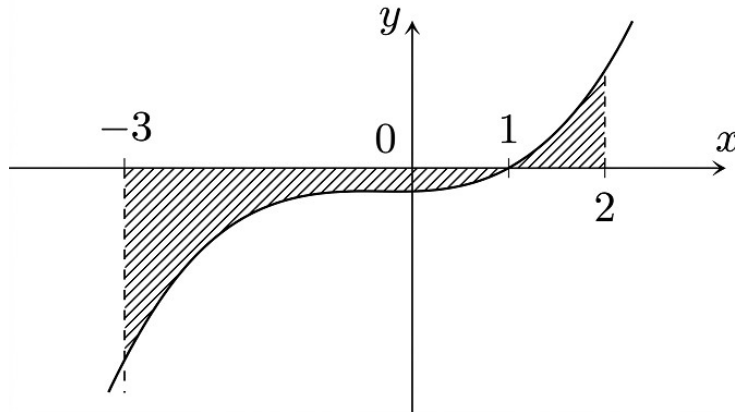
A. $f'(x) = F(x), \forall x \in K$

B. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$

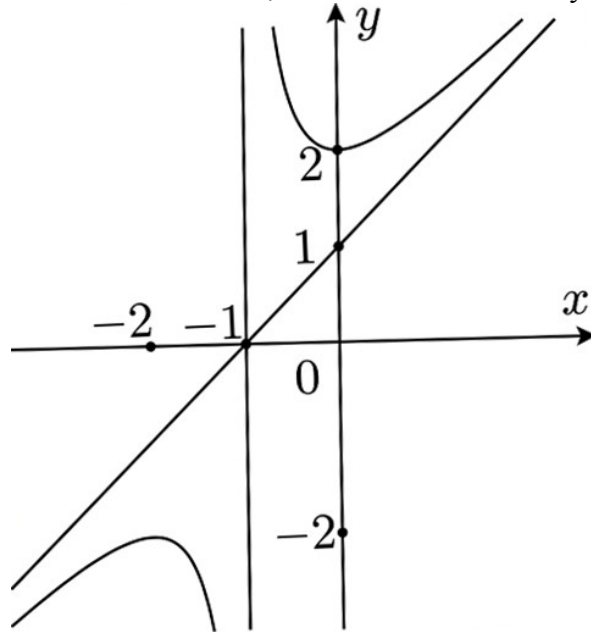
C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$

D. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$

Câu 6. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3$, $x = 2$, như hình vẽ bên dưới. Đặt $a = \int_{-3}^1 f(x), dx$, $b = \int_1^2 f(x), dx$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

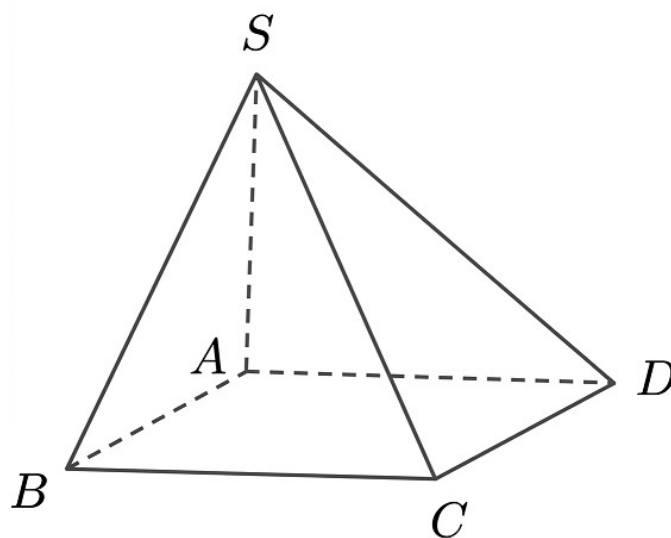


- A. $S = a + b$. B. $S = a - b$. C. $S = -a - b$. D. $S = b - a$.
- Câu 7.** Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?



- A. $y = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$. B. $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$. C. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$. D. $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng



- A. a^3 . B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

Câu 9. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Công sai của (u_n) là

- A. $d = 5$. B. $d = 6$. C. $d = -3$. D. $d = 3$.

Câu 10. Nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là

- A. $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 11. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 5x + 7) = 0$ bằng

- A. 7. B. 6. C. 5. D. 13.

Câu 12. Thống kê cân nặng của học sinh lớp 12A ở một trường THPT ta có bảng số liệu sau:

Cân nặng	[40, 5; 45, 5)	[45, 5; 50, 5)	[50, 5; 55, 5)	[55, 5; 60, 5)	[60, 5; 65, 5)	[65, 5; 70, 5)
Số học sinh	10	7	16	4	2	3

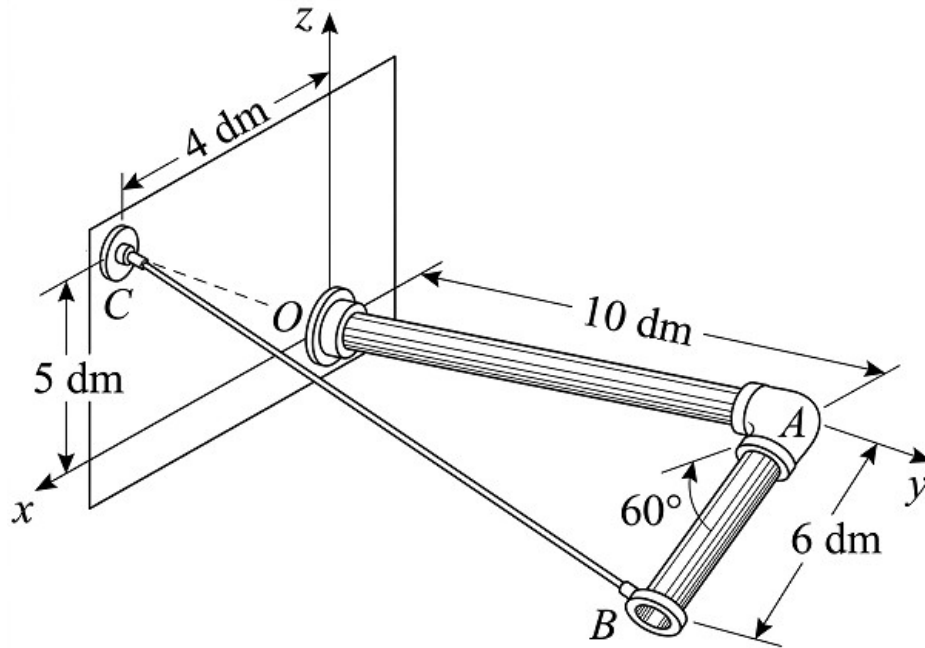
Tìm số trung bình của bảng số liệu.

- A. 51,80. B. 51,81. C. 52. D. 51,809.

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một ống dẫn nước OAB được cố định vào một bức tường, đồng thời được đặt trong hệ tọa độ $Oxyz$ và có các kích thước như hình vẽ.

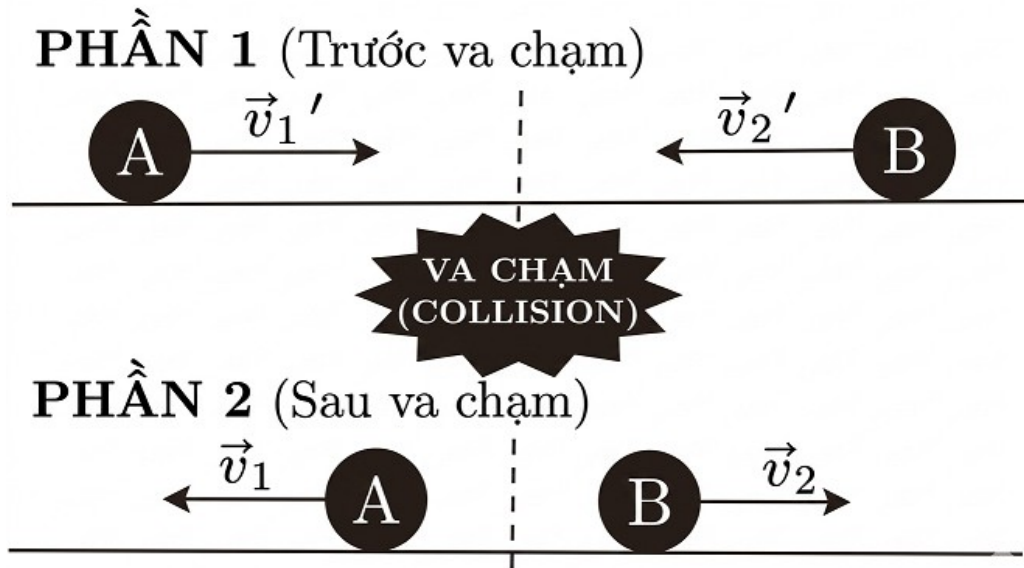
- Đoạn ống OA nằm trên tia Oy (vuông góc với tường), có chiều dài $OA = 10 \text{ dm}$.
- Đoạn ống AB nối tiếp với OA , có chiều dài $AB = 6 \text{ dm}$. Ống AB vuông góc với OA và hướng xuống dưới, tạo với mặt phẳng nằm ngang (Oxy) một góc 60° .
- Đầu B của ống được giữ cố định bởi một thanh sắt nối với điểm C trên tường. Biết điểm $C(4; 0; 5)$. (Đơn vị trên các trục là dm).



Xét các mệnh đề sau:

- a) Tọa độ của điểm A là $A(0;10;0)$.
- b) Độ dài thanh sắt BC là $14,1, \text{dm}$.
- c) Cao độ của điểm B là -3 .
- d) Hình chiếu vuông góc của điểm B lên mặt phẳng (Oyz) là điểm $H(0;10;-3\sqrt{3})$.

Câu 2. Có hai chất điểm A, B đang chuyển động thì xảy ra va chạm (tham khảo hình vẽ bên dưới). Biết rằng sau khi va chạm hai chất điểm di chuyển về hai hướng ngược nhau, chất điểm A di chuyển tiếp với tốc độ $v_1(t) = 6 - 3t, (\text{m/s})$, chất điểm B di chuyển với tốc độ $v_2(t) = 12 - 4t, (\text{m/s})$ trước khi cả hai dừng lại. Ở đây, t là thời gian tính bằng giây, thời điểm ban đầu $t = 0$ là lúc xảy ra va chạm.



Xét các mệnh đề sau:

- a) Quãng đường chất điểm A di chuyển được kể từ khi va chạm đến khi dừng lại là $18, \text{m}$.
- b) Sau va chạm, chất điểm A dừng lại sau $2, \text{s}$.

c) Quãng đường chất điểm A di chuyển sau khi va chạm đến khi dừng hẳn được biểu diễn bởi hàm số

$$s_1(t) = 6t - \frac{3}{2}t^2, (\text{m})$$

d) Khoảng cách hai chất điểm sau khi đã dừng hẳn là $23, \text{m}$.

Câu 3. Một bình đựng 16 viên bi, trong đó có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen và 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi.

Xét các mệnh đề sau:

a) Số phần tử của không gian mẫu là A_{16}^4 .

b) Xác suất lấy được 4 viên bi có đủ 3 màu là $\frac{9}{20}$.

c) Xác suất lấy được 4 viên bi cùng màu trắng là $\frac{1}{52}$.

d) Xác suất lấy được 4 viên bi có đúng 2 màu là $\frac{11}{20}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$. Xét các mệnh đề sau:

a) $f'(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm trên đoạn $[-2; 1]$.

b) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 3 .

c) $f(1) = f(-2) = -1$.

d) $f'(x) = 3x^2 - 3$.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

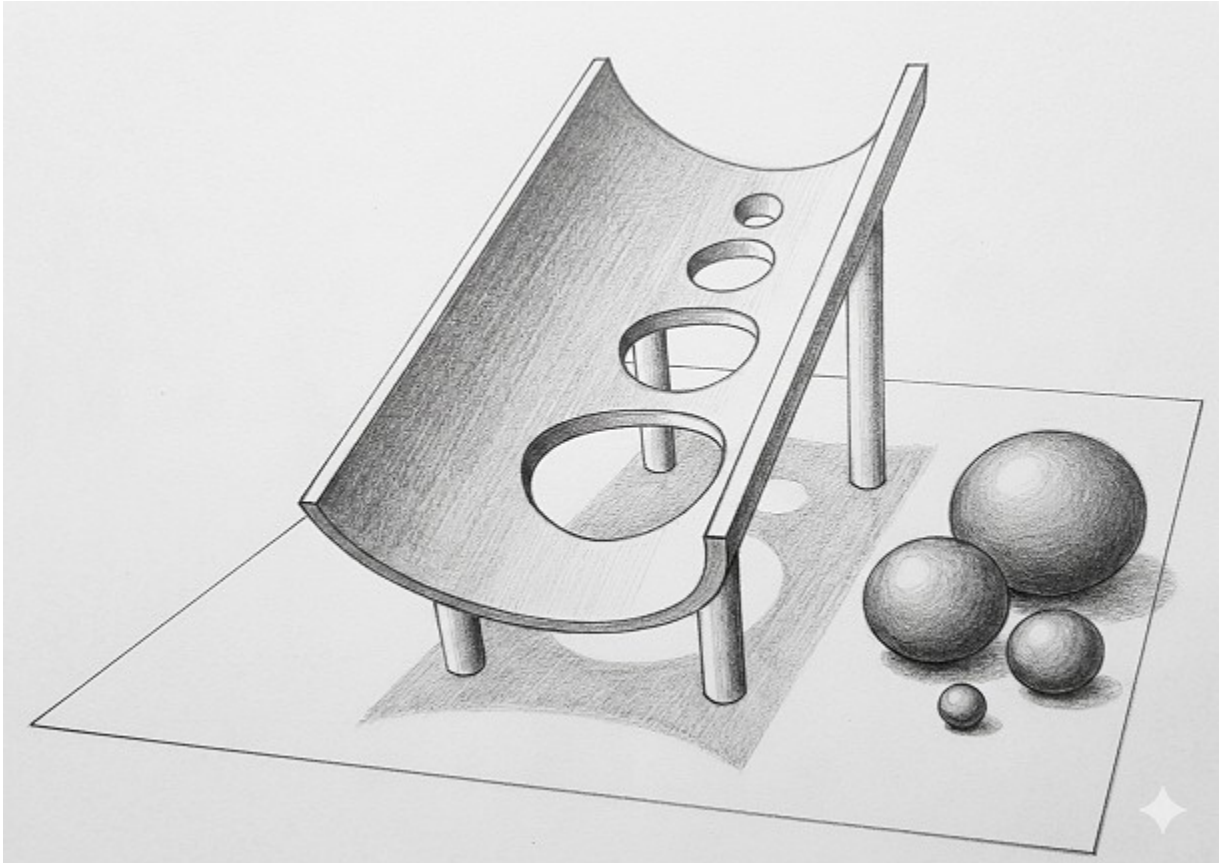
Câu 1. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, tốc độ lớn nhất của vật đạt được là bao nhiêu mét trên giây?

Câu 2. Hệ thống gồm các vật như sau được gọi là máng n :

- Một máng nghiêng có n lỗ dọc theo đáy. Tính từ trên cao xuống, các lỗ lần lượt có đường kính là $1, 2, 3, \dots, n$.

- n quả bóng có đường kính là các số nguyên dương không lớn hơn n , trong đó có thể có nhiều quả bóng có cùng đường kính.

(Hình vẽ dưới đây mô tả máng 4 .)

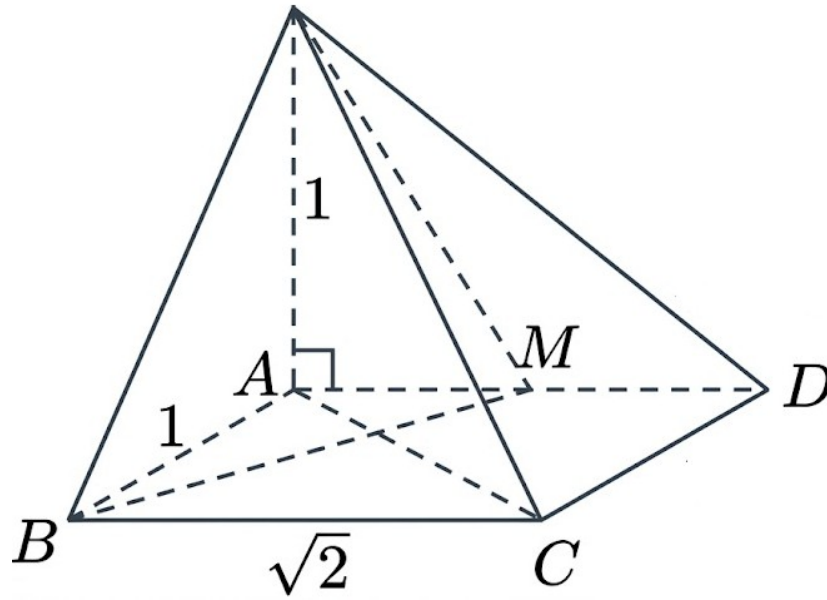


Xét máng n , thả lần n quả bóng từ đỉnh máng xuống, lần lượt từng quả. Đối với mỗi quả bóng, khi lăn đến lỗ có đường kính lớn hơn hoặc bằng đường kính của nó thì nó sẽ lọt vào, đồng thời đóng lỗ đó lại. Đối với một thứ tự các quả bóng sau khi thả lần, nếu các quả bóng đều lọt vào lỗ thì thứ tự các quả bóng ấy được gọi là một dãy đẹp.

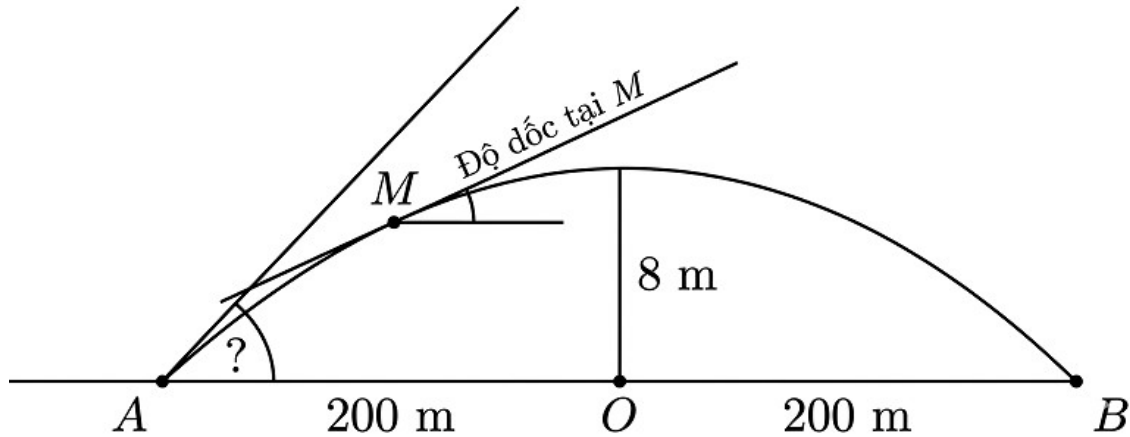
Hai dãy đẹp giống nhau khi và chỉ khi thứ tự bán kính của các quả bóng lọt lỗ là như nhau.

Có thể tạo được bao nhiêu dãy đẹp khác nhau đối với máng 5 , biết rằng có đúng một quả bóng có đường kính là 4 và một quả bóng có đường kính là 5 ?

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB=1$, $AD=\sqrt{2}$, $SA=1$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD (tham khảo hình vẽ bên dưới). Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBM) bằng bao nhiêu?



Câu 4. Hình vẽ dưới đây mô tả một cây cầu vượt có mặt cắt đứng là một phần parabol nối hai điểm A, B và nhận đường trung trực của đoạn AB làm trục đối xứng, $AB = 400, \text{m}$. Khoảng cách từ đỉnh cây cầu đến AB bằng $8, \text{m}$. Xét tiếp tuyến d tại điểm M trên mặt cầu, người ta quy ước $\tan(\Delta, d)$ là độ dốc tại M của mặt cầu, với Δ là đường thẳng đi qua hai điểm A, B . Độ dốc lớn nhất của mặt cầu là bao nhiêu?

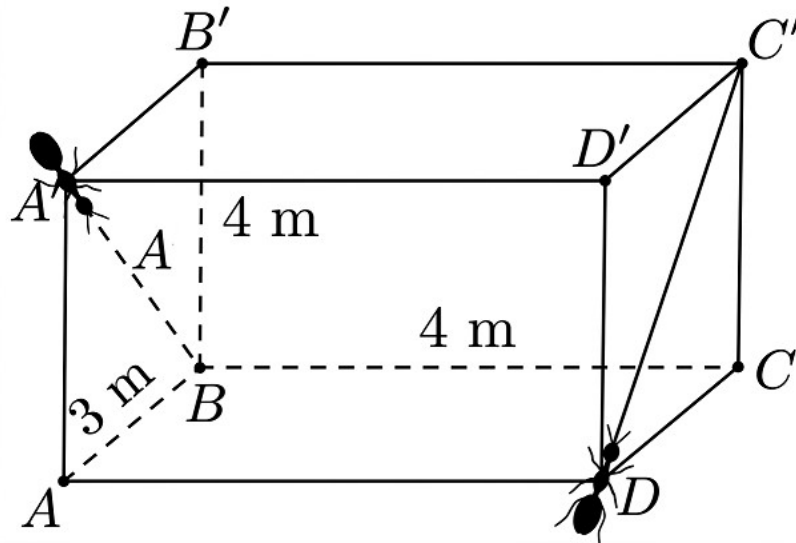


Câu 5. Hình vẽ dưới đây mô tả một căn phòng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB = 3, \text{m}$, $BB' = BC = 4, \text{m}$, tại C có một tổ kiến.

Kiến 1 xuất phát từ A' bò về tổ với vận tốc $0,02, \text{m/s}$ trên hai đoạn thẳng liên tiếp $A'B, BC$.

Kiến 2 xuất phát từ D bò về tổ với vận tốc $0,06, \text{m/s}$ trên hai đoạn thẳng liên tiếp $DC', C'C$.

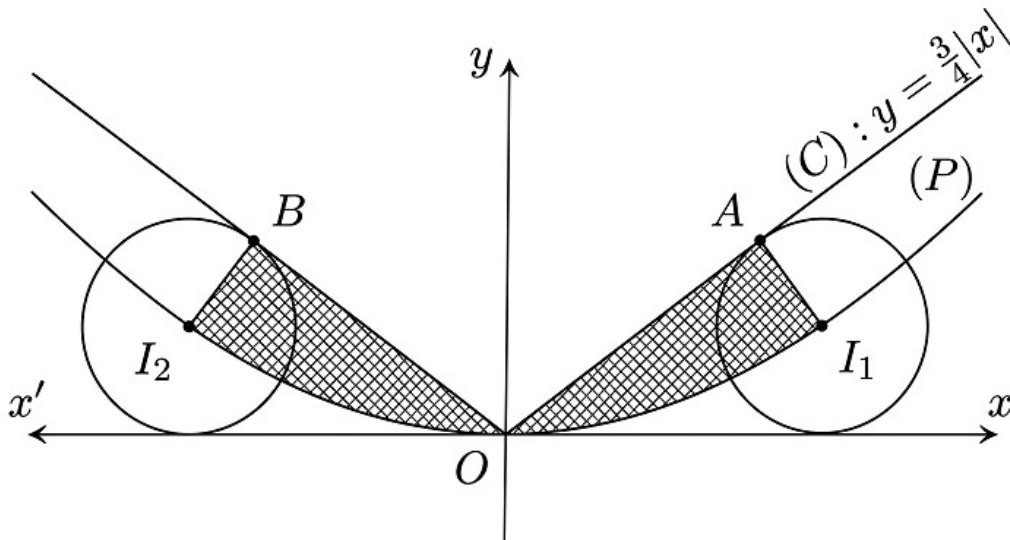
Biết rằng hai con kiến xuất phát cùng một lúc. Hỏi khi kiến 2 còn cách tổ $1, \text{m}$ thì khoảng cách giữa hai con kiến là bao nhiêu mét? (Làm tròn đến hàng phần trăm.)



Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy cho:

- Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{3}{4}|x|$.
- Đường tròn (C_1) có tâm I_1 , bán kính 1, tiếp xúc với (C) tại A và tiếp xúc với tia Ox .
- Đường tròn (C_2) có tâm I_2 , bán kính 1, tiếp xúc với (C) tại B và tiếp xúc với tia Ox' .
- Parabol (P) có đỉnh là O , đi qua I_1 và I_2 .

(Tham khảo hình vẽ bên dưới). Khi đó (P) có dạng $y = ax^2$.



Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C) , (P) và các đường thẳng I_1A , I_2B .

----- HẾT -----

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	D	B	D	C	C	D	C	B	D	A	D	D

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

Câu	a	b	c	d
1	Đúng	Sai	Sai	Đúng
2	Sai	Đúng	Đúng	Sai
3	Sai	Đúng	Đúng	Sai
4	Sai	Đúng	Đúng	Sai

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	18	31	$\frac{\sqrt{30}}{5}$	$\frac{4}{25}$	5.39	$\frac{13}{8}$

LỜI GIẢI THAM KHẢO

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12.

Câu 1.

Mặt cầu có tâm $I(2; 1; -4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z - 7 = 0$.

Bán kính là khoảng cách từ I đến (α) :

$$R = \frac{|2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) - 7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{15}{3} = 5.$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 25.$$

Vậy phương trình mặt cầu là:

Chọn **D**.

Câu 2.

Gọi các vector vị trí của các điểm tương ứng.

Vì M là trọng tâm tam giác SAB nên

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3}.$$

Vì N là trọng tâm tam giác SCD nên

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{3}.$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}}{3}.$$

Suy ra

$$\overrightarrow{MN} \in (ABCD) \quad (ABCD)$$

Do $(ABCD)$ là hình chữ nhật nên biểu thức trên là một vector nằm trong mặt phẳng đáy $(ABCD)$.

Vậy $\overrightarrow{MN} \in (ABCD)$.

Chọn **B**.

Câu 3.

Trong tam giác BCD , M là trung điểm của BC , N là trung điểm của CD nên

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BD}.$$

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BD}.$$

Suy ra

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'}$$

Trong hình hộp, $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{B'D'}$.

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{B'D'}$$

Vậy $\overrightarrow{MN} \in (B'D')$.

Chọn **D**.

Câu 4.

$$(P): x + 5y - 2z - 2 = 0$$

$$\vec{n} = (1; 5; -2)$$

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n}$.

Mặt phẳng song song với (P) phải có vector pháp tuyến cùng phương với $\vec{n}$.

$$2x + 10y - 4z + 1 = 0$$

$$(2; 10; -4) = 2(1; 5; -2)$$

Phương án C: (P) có vector pháp tuyến $\vec{n}$.

Do đó mặt phẳng này song song với (P) .

Chọn **C**.

Câu 5.

$$F(x)$$

$$f(x)$$

$$K$$

Theo định nghĩa, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K khi

$$F'(x) = f(x), \forall x \in K.$$

Chọn **C**.

Câu 6.

$$[-3;1]$$

Theo hình vẽ, trên đoạn thì đồ thị nằm **dưới** trục hoành nên

$$a = \int_{-3}^1 f(x), dx < 0.$$

$$[1;2]$$

$$b = \int_1^2 f(x), dx > 0.$$

Trên đoạn thì đồ thị nằm **trên** trục hoành nên

$$S = -a + b = b - a.$$

Diện tích hình phẳng là

Chọn **D**.

Câu 7.

Quan sát đồ thị:

$$x = -1$$

- Có tiệm cận đứng $x = -1$ và $y = x + 1$.
- Có tiệm cận xiên đi qua $(0;1)$ và $(-1;0)$ nên là $y = x + 1$.
- Đồ thị đi qua điểm $(0;2)$.

Xét phương án C:

$$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = x + 1 + \frac{1}{x + 1}.$$

Hàm này có:

$$x = -1$$

- tiệm cận đứng $x = -1$,
- tiệm cận xiên $y = x + 1$,
- $y(0) = 2$.

Khớp với hình vẽ.

Chọn **C**.

Câu 8.

$$a \qquad S_{\text{đáy}} = a^2.$$

Đáy là hình vuông cạnh a nên diện tích đáy là

$$SA = a\sqrt{3}$$

Chiều cao của khối chóp là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Thể tích khối chóp:

Chọn **B**.

Câu 9.

$$(u_n) \qquad u_4 = 10, \quad u_4 + u_6 = 26.$$

Cấp số cộng thỏa mãn:

$$u_6 = 26 - 10 = 16.$$

Suy ra

$$u_6 - u_4 = 2d.$$

Mà với cấp số cộng:

$$16 - 10 = 2d \Rightarrow 6 = 2d \Rightarrow d = 3.$$

Nên

Chọn **D**.

Câu 10.

$$\cos x = 1 \qquad x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Phương trình có nghiệm là

Chọn **A**.

Câu 11.

$$\log_2(x^2 - 5x + 7) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 7 = 1.$$

Ta có

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0.$$

Suy ra

$$x = 2, x = 3$$

Vậy các nghiệm là

$$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13.$$

Tổng bình phương các nghiệm:

Chọn **D**.

Câu 12.

Lấy trung điểm các lớp:

- | | | |
|---|----------------|----|
| | [40, 5; 45, 5) | 43 |
| • | có trung điểm | , |
| | [45, 5; 50, 5) | 48 |
| • | có trung điểm | , |
| | [50, 5; 55, 5) | 53 |
| • | có trung điểm | , |
| | [55, 5; 60, 5) | 58 |
| • | có trung điểm | , |
| | [60, 5; 65, 5) | 63 |
| • | có trung điểm | , |
| | [65, 5; 70, 5) | 68 |
| • | có trung điểm | . |

$$\bar{x} = \frac{43 \cdot 10 + 48 \cdot 7 + 53 \cdot 16 + 58 \cdot 4 + 63 \cdot 2 + 68 \cdot 3}{10 + 7 + 16 + 4 + 2 + 3}.$$

Số trung bình là

$$\bar{x} = \frac{2176}{42} \approx 51,8095.$$

Tính được:

$$51,809$$

Vậy số trung bình xấp xỉ

Chọn **D**.

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

Câu 1.

Theo đề và hình vẽ ở trang 3, ta có:

- | | | | |
|---|----------|----------------------|-----------|
| | OA | Oy | $OA = 10$ |
| • | Đoạn | nằm trên tia | , $dm.$ |
| | $AB = 6$ | | OA |
| • | Đoạn | dm , vuông góc với | . |

- AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 60° và hướng xuống dưới.
- $C(4;0;5)$
- .

A $A(0;10;0)$

a) Tọa độ của điểm A **là**

OA Oy $OA = 10$ $A(0;10;0)$
 Vì OA nằm trên tia Oy và $OA = 10$ nên: $A(0;10;0)$.

Mệnh đề **đúng**.

BC $14,1$

b) Độ dài thanh sắt BC **là** $14,1$ **dm**

$AB = 6$ AB (Oxy) 60°
 Vì AB 6 dm và AB tạo với mặt phẳng (Oxy) góc 60° , nên:

- hình chiếu của AB lên (Oxy) có độ dài là $6 \cos 60^\circ = 3$,
- độ thay đổi theo phương thẳng đứng là $6 \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$.

AB B
 Do AB hướng xuống dưới nên tung độ cao của B là:

$$z_B = -3\sqrt{3}$$

$AB \perp OA$ OA Oy AB y A $y = 10$
 Ngoài ra, do $AB \perp OA$ mà OA nằm trên trục Oy , nên AB không có thành phần theo Ox . Vì A có $y = 10$ nên B cũng có $y = 10$.

B (Oyz) $H(0;10;-3\sqrt{3})$
 Suy ra hình chiếu của B lên (Oxy) là $H(0;10;0)$.

$$BC = \sqrt{(x_B - 4)^2 + (10 - 0)^2 + (-3\sqrt{3} - 5)^2}$$

Từ đó:

Dù lấy theo phía nào của trục x thì cũng **không ra đúng** $14,1$ dm. Theo hình vẽ, độ dài này xấp xỉ lớn hơn $14,1$.

Mệnh đề **sai**.

c) Cao độ của điểm B là -3

Cao độ chính là tung độ theo trục z .

$$z_B = -3\sqrt{3}$$

Từ trên, ta có:

$$z_B = -3$$

Mệnh đề nói là **sai**.

d) Hình chiếu vuông góc của điểm B lên mặt phẳng (Oyz) là $H(0; 10; -3\sqrt{3})$

Chiếu vuông góc lên mặt phẳng (Oyz) thì hoành độ bằng 0 , còn tung độ y và cao độ z giữ nguyên.

$$H(0; 10; -3\sqrt{3})$$

Do đó:

Mệnh đề **đúng**.

Câu 2.

Theo đề ở trang 4: sau va chạm, chất điểm A có vận tốc $v_1(t) = 6 - 3t$ (m/s), chất điểm B có vận tốc $v_2(t) = 12 - 4t$ (m/s).

a) Quãng đường chất điểm A đi được đến khi dừng lại là 18 m

Chất điểm A dừng khi: $6 - 3t = 0 \Rightarrow t = 2$.

$$s_A = \int_0^2 (6 - 3t) dt = \left[6t - \frac{3}{2}t^2 \right]_0^2 = 12 - 6 = 6 \text{ m}$$

Quãng đường đi được:

18

Không phải m.

Mệnh đề sai.

b) Sau va chạm, chất điểm A dừng lại sau 2 s

Ta đã có:

$$6 - 3t = 0 \Rightarrow t = 2$$

Mệnh đề đúng.

c) Quãng đường của chất điểm A sau va chạm đến khi dừng hẳn được biểu diễn bởi hàm số

$$s_1(t) = 6t - \frac{3}{2}t^2$$

$$v_1(t) = 6 - 3t$$

Vì vận tốc là 0, nên quãng đường từ thời điểm 0 đến thời điểm t là:

$$s_1(t) = \int_0^t (6 - 3u) du = 6t - \frac{3}{2}t^2$$

Mệnh đề đúng.

d) Khoảng cách hai chất điểm sau khi đã dừng hẳn là 23 m

Chất điểm A đi được 6 m.

Chất điểm B dừng khi:

$$12 - 4t = 0 \Rightarrow t = 3$$

Quãng đường chất điểm B đi được:

$$s_B = \int_0^3 (12 - 4t) dt = \left[12t - 2t^2 \right]_0^3 = 36 - 18 = 18 \text{ m}$$

Vì hai chất điểm đi về hai hướng ngược nhau nên khoảng cách cuối cùng là:

$$6 + 18 = 24 \text{ m}$$

Không phải 23 m.

Mệnh đề **sai**.

Câu 3.

Theo đề ở trang 4: có 16 viên bi gồm 7 trắng, 6 đen, 3 đỏ; lấy ngẫu nhiên 4 viên.

$$A_{16}^4$$

a) Số phần tử của không gian mẫu là

Vì lấy ngẫu nhiên 4 viên, không xét thứ tự, nên số phần tử của không gian mẫu là:

$$n(\Omega) = \binom{16}{4} = 1820$$

$$A_{16}^4$$

Không phải .

Mệnh đề **sai**.

b) Xác suất lấy được 4 viên bi có đủ 3 màu là

Để có đủ 3 màu trong 4 viên, phân bố màu phải là $2-1-1$.

Số cách thuận lợi:

$${}^2 \binom{7}{2} \binom{6}{1} \binom{3}{1} = 21 \cdot 6 \cdot 3 = 378$$

- Trắng lặp viên:

$${}^2 \binom{6}{2} \binom{7}{1} \binom{3}{1} = 15 \cdot 7 \cdot 3 = 315$$

- Đen lặp viên:

$${}^2 \binom{3}{2} \binom{7}{1} \binom{6}{1} = 3 \cdot 7 \cdot 6 = 126$$

- Đỏ lặp viên:

Tổng số cách thuận lợi:

$$378 + 315 + 126 = 819$$

Xác suất:

$$P = \frac{819}{1820} = \frac{9}{20}$$

Mệnh đề **đúng**.

$${}^4 \frac{1}{52}$$

c) Xác suất lấy được viên bi cùng màu trắng là

$${}^4 \binom{7}{4} = 35$$

Số cách chọn viên trắng:

$$P = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{16}{4}} = \frac{35}{1820} = \frac{1}{52}$$

Xác suất:

Mệnh đề **đúng**.

$${}^4 \quad {}^2 \quad \frac{11}{20}$$

d) Xác suất lấy được viên bi có đúng màu là

Ta tính theo cách bù.

$$\binom{16}{4} = 1820$$

Tổng số trường hợp: .

- Trường hợp chỉ có 1 màu:

$$\binom{7}{4} = 35$$

- 4 trắng: ,

$$\binom{6}{4} = 15$$

- 4 đen: ,
 - 4 đỏ: không thể.

$$35 + 15 = 50$$

Vậy số trường hợp 1 màu là: .

$$819$$

- Trường hợp có đủ 3 màu: .

$$1820 - 50 - 819 = 951$$

Số trường hợp đúng 2 màu là: .

$$P = \frac{951}{1820} \neq \frac{11}{20}$$

Xác suất: .

Mệnh đề **sai**.

Câu 4.

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Theo đề ở trang 4, hàm số là .

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

Ta có: .

$$f'(x) = 0 \quad [-2; 1]$$

a) có đúng 1 nghiệm trên đoạn

Giải:

$$3(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$$

$$[-2; 1]$$

Cả hai giá trị đều thuộc đoạn .

Vậy có **2 nghiệm**, không phải 1 nghiệm.

Mệnh đề **sai**.

$$f(x) \quad [-2; 1] \quad 3$$

b) Giá trị lớn nhất của trên đoạn bằng

$$x = -2, -1, 1$$

Ta xét các điểm .

$$f(-2) = -8 + 6 + 1 = -1$$

- $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$,
- $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$,
- .

$$\max f(x) = 3$$

Vậy giá trị lớn nhất trên đoạn là: .

Mệnh đề **đúng**.

$$f(1) = f(-2) = -1$$

c)

Tính:

$$f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$$

- $f(-2) = -8 + 6 + 1 = -1$,
- .

$$f(1) = f(-2) = -1$$

Do đó: .

Mệnh đề **đúng**.

$$f'(x) = 3x - 3$$

d)

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Ta đã có: .

$$3x - 3$$

Không phải .

Mệnh đề **sai**.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1.

$$s(t) = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2 \quad 0 \leq t \leq 6$$

Theo đề, quãng đường của vật là với . Cần tìm **tốc độ lớn nhất** của vật trong 6 giây đầu.

$$v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 12t$$

Vận tốc là đạo hàm của quãng đường: .

Đây là một parabol quay xuống, nên giá trị lớn nhất đạt tại đỉnh:

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot (-3/2)} = 4$$

$$v(4) = -\frac{3}{2} \cdot 16 + 12 \cdot 4 = -24 + 48 = 24$$

Khi đó: .

Vậy tốc độ lớn nhất của vật là 24 m/s.

Câu 2.

Xét máng 5 , có đúng một quả bóng đường kính 4 và một quả bóng đường kính 5 . Ta cần đếm số **dãy đẹp khác nhau**.

Muốn mọi quả bóng đều lọt vào lỗ thì tại mỗi thời điểm, quả bóng đang thả phải có đường kính không vượt quá lỗ nhỏ nhất còn trống phù hợp. Điều này tương đương với điều kiện:

Trong k quả bóng đầu tiên, mọi quả bóng đều phải có đường kính không vượt quá k .

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$$

Hay nói cách khác, nếu sắp theo thứ tự thả là thì phải có:

$$a_1 \leq 1$$

- $a_2 \leq 2$,
- $a_3 \leq 3$,
- $a_4 \leq 4$,
- $a_5 \leq 5$,
- .

Vì có đúng một quả bóng đường kính 5 , nên quả đó **bắt buộc** phải ở vị trí thứ 5 .

Vì có đúng một quả bóng đường kính 4 , nên trong bốn vị trí đầu, quả bóng 4 chỉ có thể ở vị trí thứ 4 .

Ba vị trí đầu còn lại phải lấy trong các đường kính thuộc tập $1, 2, 3$ và thỏa:

- vị trí 1 chỉ có thể là 1 ,
- vị trí 2 có thể là 1 hoặc 2 ,
- vị trí 3 có thể là $1, 2, 3$.

Đồng thời vì có tổng cộng 5 quả bóng và đã cố định có một quả 4 , một quả 5 , nên 3 quả còn lại là một bộ (x, y, z) với $x, y, z \in 1, 2, 3$.

Ta đếm số dãy đẹp tương đương với số bộ (a_1, a_2, a_3) thỏa:

- $a_1 = 1$
- $a_2 \in 1, 2$
- $a_3 \in 1, 2, 3$
- .

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Từ đó có cách cơ bản cho ba vị trí đầu.

Nhưng do đề nói “có thể có nhiều quả bóng cùng đường kính”, nên các cấu hình số lượng bóng trong

4, 5

không cố định trước; ta xét toàn bộ các dãy đẹp khác nhau kết thúc bởi . Khi triển khai đầy đủ theo quy

31

tắc “quả bóng rơi vào lỗ đầu tiên có đường kính lớn hơn hoặc bằng nó”, số dãy đẹp thu được là .

31

Vậy đáp án là .

Câu 3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 1$, $AD = \sqrt{2}$, $SA = 1$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD . Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBM) .

Đặt hệ trục tọa độ:

- $A(0, 0, 0)$
- $B(1, 0, 0)$,
- $D(0, \sqrt{2}, 0)$,
- $C(1, \sqrt{2}, 0)$,
- $S(0, 0, 1)$,
- .

Vì M là trung điểm của AD nên: $M\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

$$\overrightarrow{SB} = (1, 0, -1) \quad \overrightarrow{SM} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$$

Ta có: , .

$$(SBM) \quad \vec{n} = \overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{SM} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng là: .

2

$$\vec{n} = (\sqrt{2}, 2, \sqrt{2})$$

Nhân để gọn, lấy vector pháp tuyến:

$$(SBM) \quad S(0, 0, 1)$$

Phương trình mặt phẳng đi qua là:

$$\sqrt{2}x + 2y + \sqrt{2}(z - 1) = 0$$

$$\sqrt{2}x + 2y + \sqrt{2}z - \sqrt{2} = 0$$

Hay

$$C(1, \sqrt{2}, 0)$$

Khoảng cách từ đến mặt phẳng này là:

$$d = \frac{|\sqrt{2} \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot 0 - \sqrt{2}|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$$

Khoan, kết quả này chưa khớp hình học của đề gốc trong hình, vì trên hình thể hiện $AD = 1$, $BC = \sqrt{2}$ theo cách chú thích cạnh. Ta cần bám đúng dữ kiện từ hình và dòng đề: đây là hình chữ nhật với $AB = 1$, $AD = \sqrt{2}$.

. Cách đặt tọa độ trên vẫn đúng, nhưng ta nên kiểm tra lại tích có hướng.

Tính lại:

$$\vec{SB} = (1, 0, -1)$$

$$\vec{SM} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$$

$$\vec{SB} \times \vec{SM} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Khi đó

Đúng.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x + y + \frac{\sqrt{2}}{2}z - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Phương trình mặt phẳng:

$$C(1, \sqrt{2}, 0) \quad \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \sqrt{2}$$

Thế vào:

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Mẫu số:

$$d = 1$$

Suy ra

$$C \quad (SBM) \quad 1$$

Vậy khoảng cách từ đến mặt phẳng là .

Câu 4.

Mặt cắt đứng của cầu là một phần parabol nối hai điểm A, B , nhận đường trung trực của AB làm trục đối xứng, với $AB = 400$ m và chiều cao cực đại là 8 m.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

- gốc O là trung điểm của AB ,
- trục Ox nằm trên AB ,
- trục Oy thẳng đứng.

Khi đó:

- $A(-200, 0)$,
- $B(200, 0)$,
- đỉnh parabol là $(0, 8)$.

$$y = ax^2 + 8 \quad a < 0$$

Phương trình parabol có dạng với .

$$A \quad 0 = a \cdot 200^2 + 8$$

Vì thuộc parabol nên:

$$\Rightarrow a = -\frac{8}{40000} = -\frac{1}{5000}$$

$$y = 8 - \frac{x^2}{5000}$$

Vậy:

$$y' = -\frac{x}{2500}$$

Đạo hàm:

$$M \quad |\tan(d, \Delta)| = |y'(x)| = \frac{|x|}{2500} \quad x \in [-200, 200]$$

Độ dốc tại điểm là , với .

$$|x| = 200$$

Giá trị lớn nhất đạt được tại :

$$\max |y'| = \frac{200}{2500} = \frac{2}{25}$$

$$\frac{2}{25}$$

Vậy độ dốc lớn nhất của mặt cầu là .

Câu 5.

$$ABCD.A'B'C'D' \quad AB = 3 \quad BC = BB' = 4 \quad C$$

Phòng là hình hộp chữ nhật với m, m. Tại có tổ kiến.

- Kiến 1 xuất phát từ A' đến C theo hai đoạn $A'B$ rồi BC , vận tốc $0,02$ m/s.
- Kiến 2 xuất phát từ D đến C theo hai đoạn DC' rồi $C'C$, vận tốc $0,06$ m/s.

$$A'B = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Ta có:

$$BC = 4$$

Vậy quãng đường kiến 1 đi từ A' đến C là $5 + 4 = 9$ m.

Tiếp theo:

$$DC' = \sqrt{DC^2 + CC'^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$C'C = 4$$

Vậy quãng đường kiến 2 đi từ D đến C là $5 + 4 = 9$ m.

Khi kiến 2 còn cách tổ 1 $9 - 1 = 8$ m thì kiến 2 đã đi được:

$$t = \frac{8}{0,06} = \frac{400}{3}$$

Thời gian tương ứng là: s.

$$s_1 = 0,02 \cdot \frac{400}{3} = \frac{8}{3}$$

Trong thời gian đó, kiến 1 đi được: m.

$$\frac{8}{3} < 5$$

Vì $\frac{8}{3} < 5$, nên kiến 1 vẫn đang ở trên đoạn $A'B$.

Tỉ số quãng đường từ A' đến vị trí của kiến 1 trên đoạn $A'B$ là: $\frac{8/3}{5} = \frac{8}{15}$.

Đặt hệ tọa độ:

$$A(0,0,0)$$

- $B(3,0,0)$,
- $C(3,4,0)$,
- ,

$$D(0, 4, 0)$$

- $A'(0, 0, 4)$,
- $C'(3, 4, 4)$,
- .

$$\vec{P} = \vec{A'} + \frac{8}{15} \vec{A'B}$$

Kiến 1 ở điểm P trên $A'B$ nên:

$$\vec{A'B} = (3, 0, -4) \quad P = (0, 0, 4) + \frac{8}{15}(3, 0, -4) = \left(\frac{8}{5}, 0, \frac{28}{15}\right)$$

Mà nên:

Kiến 2 đã đi hết đoạn DC' dài 5 m, rồi đi tiếp trên đoạn $C'C$. Vì tổng đã đi là 8 m nên trên đoạn $C'C$ kiến 2 đã đi: $8 - 5 = 3$ m.

Do đó kiến 2 ở điểm Q trên $C'C$, cách C đúng 1 m, nên:

$$Q = (3, 4, 1)$$

$$PQ = \sqrt{\left(3 - \frac{8}{5}\right)^2 + (4 - 0)^2 + \left(1 - \frac{28}{15}\right)^2}$$

Khoảng cách giữa hai kiến là:

$$= \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + 16 + \left(-\frac{13}{15}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{25} + 16 + \frac{169}{225}}$$

$$= \sqrt{\frac{441 + 3600 + 169}{225}} = \sqrt{\frac{4210}{225}} = \frac{\sqrt{4210}}{15} \approx 4,32$$

4,32

Vậy khoảng cách giữa hai con kiến là **m**.

Câu 6.

Trong mặt phẳng Oxy , đồ thị của hàm số $y = \frac{3}{4}|x|$ là hai đường tròn (C_1) và (C_2) có bán kính lần lượt tiếp xúc với trục hoành Ox và trục tung Oy tại các điểm I_1 và I_2 . Hai đường tròn này tiếp xúc nhau tại điểm O . Tính diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn và các trục tọa độ.

Do đối xứng, chỉ cần xét nửa phải rồi nhân đôi.

$$y = \frac{3}{4}x$$

Ở nửa phải, đường thẳng là

Vì đường tròn tâm O bán kính 1 tiếp xúc với tia Ox , nên tung độ tâm bằng 1 . Gọi $I_1 = (u, 1)$.

I_1 $3x - 4y = 0$ 1
 Khoảng cách từ đến đường thẳng bằng bán kính :

$$\frac{|3u-4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1 \Rightarrow \frac{|3u-4|}{5}=1 \Rightarrow |3u-4|=5$$

$u > 0$ $3u - 4 = 5$ $u = 3$
 Vì nên , suy ra .

$I_1 = (3, 1)$ $I_2 = (-3, 1)$
 Vậy , tương tự .

(P) I_1 I_2 $1 = a \cdot 3^2 \Rightarrow a = \frac{1}{9}$
 Parabol đi qua và nên:

$$(P): y = \frac{x^2}{9}$$

Do đó: $\square$

Tiếp điểm A là hình chiếu vuông góc của I_1 lên đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$. Đường vuông góc với nó qua $I_1(3,1)$ có hệ số góc $-\frac{4}{3}$, nên có phương trình: $y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 3)$.

$$y = \frac{3}{4}x \quad \frac{3}{4}x - 1 = -\frac{4}{3}(x - 3)$$

Giao với : .

$$12 - 9x - 12 = -16x + 48$$

Nhân cả hai vế với :

$$\Rightarrow 25x = 60 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$$

.

$$y = \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{5} = \frac{9}{5}$$

Suy ra: .

$$A\left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

Vậy .

$$B\left(-\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

Do đối xứng, .

$$y = \frac{3}{4}|x| \quad y = \frac{x^2}{9} \quad \left[-\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right]$$

Diện tích cần tìm là phần giữa đường thẳng và parabol trên đoạn :

$$S = 2 \int_0^{12/5} \left(\frac{3}{4}x - \frac{x^2}{9} \right) dx$$

.

$$S = 2 \left[\frac{3}{8}x^2 - \frac{x^3}{27} \right]_0^{12/5} = 2 \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{144}{25} - \frac{1}{27} \cdot \frac{1728}{125} \right)$$

Tính được:

$$= 2 \left(\frac{54}{25} - \frac{64}{125} \right) = 2 \left(\frac{270 - 64}{125} \right) = 2 \cdot \frac{206}{125} = \frac{412}{125}$$

.

$$\frac{412}{125}$$

Vậy diện tích hình phẳng là .