

Ngày thi: 06/3/2025

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi này có 02 trang)

PHẦN I: TRẮC NGHIỆM (6,0 điểm). (Mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm)

$$\frac{159}{121} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\vdots}}$$

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$$

($a_i \in \mathbb{Q}^*$, $a_n \neq 1$). Giá trị của $a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n$ là

Câu 1. Biết

A. 14.

B. 21.

C. 9.

D. 20.

Câu 2. Cho a là một nghiệm âm của phương trình $\sqrt{(x-3)(x-6)} - 4\sqrt{3-x} = 0$. Giá trị của biểu thức $a^2 - a$ là

A. 110.

B. 120.

C. 80.

D. 90.

Câu 3. Nếu a, b là các số tự nhiên sao cho $\sqrt{7 + \sqrt{48}} = a + \sqrt{b}$ thì $a^2 + b^2$ bằng

A. 10.

B. 13.

C. 25.

D. 34.

Câu 4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2m^2x + 3my = 4 \\ 2x - my = 2m^2 \end{cases}$. Giá trị của tham số m để hệ phương trình nhận cặp số $(2; 2)$ làm nghiệm là

A. -2.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 5. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Xác suất của biến cố "2 người được chọn đều là nam" là

A. $\frac{1}{15}$.

B. $\frac{7}{45}$.

C. $\frac{7}{15}$.

D. $\frac{5}{7}$.

Câu 6. Có ba chiếc hộp: hộp thứ nhất chứa 6 bi xanh được đánh số từ 1 đến 6, hộp thứ hai chứa 5 bi đỏ được đánh số từ 1 đến 5, hộp thứ ba chứa 4 bi vàng được đánh số từ 1 đến 4. Lấy ngẫu nhiên ba viên bi. Số kết quả thuận lợi của biến cố "Ba bi được chọn vừa khác màu vừa khác số" là

A. 60.

B. 64.

C. 84.

D. 120.

Câu 7. Cho $M = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$ với $xy > 0$. Giá trị nhỏ nhất của M là

A. 2.

B. $\frac{9}{4}$.

C. $\frac{12}{5}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Câu 8. Nghiệm nguyên dương của phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ là cặp số nguyên dương $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $ax_0 + by_0 = c$. Số nghiệm nguyên dương của phương trình $2x + 3y = 25$ là

- A. 2. B. 4. C. 5. D. 3.

Câu 9. Tam giác ABC cân tại A có $AB = 7, BC = 5$, số đo của $\widehat{A}$ (làm tròn đến phút) là

- A. $46^{\circ}51'$. B. $46^{\circ}31'$. C. $41^{\circ}31'$. D. $41^{\circ}51'$.

Câu 10. Tam giác ABC có $AB = 5, AC = 6, \widehat{A} = 39^{\circ}$, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (làm tròn đến hàng phần trăm) bằng

- A. 3,01. B. 2,91. C. 3,91. D. 2,78.

Câu 11. Có bao nhiêu cách xếp 9 quả bóng giống nhau vào 3 chiếc hộp khác nhau sao cho mỗi hộp chứa ít nhất một quả bóng?

- A. 18659. B. 168. C. 28. D. 12.

Câu 12. Đa thức $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 3, $f(x)$ chia cho $x - 3$ dư 2. Dư trong phép chia $f(x)$ cho $x^2 - 5x + 6$ là

- A. $x - 5$. B. $3x + 2$. C. $-3x + 2$. D. $-x + 5$.

PHẦN II: TỰ LUẬN (14,0 điểm)

Câu 13 (2,0 điểm). Cho các số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn $2xy + yz + 18zx = 0$ và $2x + y + 4z = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + yz}$.

Câu 14 (1,5 điểm). Giải phương trình $x^2 - 3x - 3 = \sqrt{x^3 + x^2 - x + 2}$.

Câu 15 (1,5 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(y+1) = 6 - 2y \\ x^4 + 2x^2 + y(x^2 + 1) = 12 - y^2 \end{cases}$$
.

Câu 16 (1,0 điểm). Cho hai số nguyên m, n sao cho các phương trình $x^2 + mx + n = 0$ và $x^2 + mx - n = 0$ đều có nghiệm nguyên. Chứng minh mn chia hết cho 6.

Câu 17 (1,0 điểm). Tìm các số nguyên tố p, q và số nguyên a , biết $pa^2 - 3a = 6q + 2p$.

Câu 18 (6,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H . Hai đường thẳng DE và BC cắt nhau tại M , đoạn thẳng AM cắt đường tròn (O) tại N (N khác A). Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng DE và BC .

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AI}{AK};$$

- a) Chứng minh ;
 b) Vẽ đường kính AP của đường tròn (O) . Chứng minh bốn điểm P, K, H, N thẳng hàng;
 c) Chứng minh IM là tia phân giác của $\widehat{HIN}$.

Câu 19 (1,0 điểm). Cho tập hợp M có 9 phần tử là các số tự nhiên, không có số nào có ước nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng có thể tìm được hai phần tử khác nhau của M mà tích của chúng là số chính phương.

----- HẾT -----

- Thí sinh được sử dụng máy tính cầm tay;
 - Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí của Giám thị 1: Chữ kí của Giám thị 2:

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH**

**HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
CẤP TỈNH TRUNG HỌC CƠ SỞ NĂM 2025**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: **TOÁN** - Bảng A

Ngày thi: **06/3/2025**

(Hướng dẫn này có 03 trang)

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- Giám khảo chấm đúng theo hướng dẫn của Sở Giáo dục và Đào tạo.
- Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm thi.
- Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

II. ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM: Mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	A	A	B	A	C	B	D	B	D	A	C	D

PHẦN II. TỰ LUẬN:

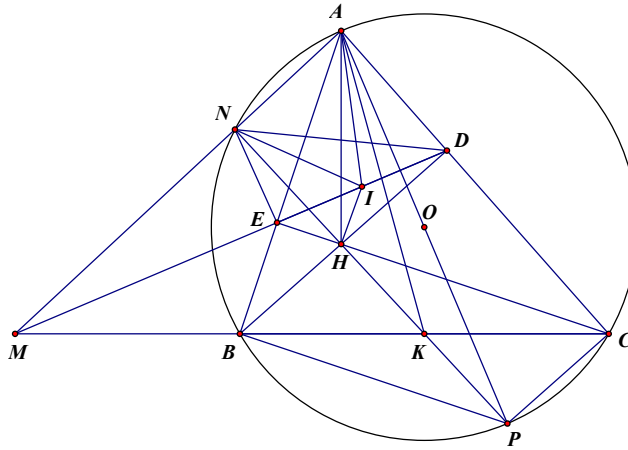
Câu	Sơ lược lời giải / Một số gợi ý chính	Điểm
13 (2,0 đ)	$2xy + yz + 18zx = 0 \Rightarrow 18zx = -y(2x + z)$ Từ (1)	1,0
	$2x + y + 4z = 0 \Rightarrow y = -2x - 4z$ $18zx = (2x + 4z)(2x + z)$ Từ (2) thế vào (1) được $\Leftrightarrow 9zx = (2x + z)(2z + x) \Leftrightarrow x^2 + z^2 - 2zx = 0 \Leftrightarrow (x - z)^2 = 0 \Leftrightarrow x = z$	
	$y = -6z$ Thế vào (2) được	0,5

Câu	Sơ lược lời giải / Một số gợi ý chính	Điểm
	$P = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + yz} = \frac{z^2 + 36z^2}{z^2 - 6z^2} = -\frac{37}{5}$	0,5
14 (1,5 đ)	ĐKXD: $x \geq -2$	0,25
	Biến đổi phương trình thành $(x^2 - x + 1) - 2(x + 2) - \sqrt{(x + 2)(x^2 - x + 1)} = 0$	0,5
	chia hai vế cho $x^2 - x + 1 > 0$ được $2 \cdot \frac{x+2}{x^2-x+1} + \sqrt{\frac{x+2}{x^2-x+1}} - 1 = 0$, đặt $t = \sqrt{\frac{x+2}{x^2-x+1}}$	0,5
	($t \geq 0$), ta được phương trình: $2t^2 + t - 1 = 0$, giải phương trình được $t = -1$ (loại), $t = \frac{1}{2}$ (nhận)	
	+ Với $t = \frac{1}{2}$, ta có: $\sqrt{\frac{x+2}{x^2-x+1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 5x - 7 = 0$. Được $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{53}}{2}$ kết hợp với $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{53}}{2}$ đk. Vậy phương trình có nghiệm	0,25
15 (1,5 đ)	Hệ trở thành $\begin{cases} x^2y + x^2 + 2y = 6 & (1) \\ x^4 + 2x^2 + x^2y + y^2 + y = 12 & (2) \end{cases}$	0,75
	Cộng vế với vế của hai phương trình được $x^4 + 2x^2y + y^2 + 3x^2 + 3y = 18$ $\Leftrightarrow (x^2 + y)^2 + 3(x^2 + y) - 18 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y + 6)(x^2 + y - 3) = 0$ nên $x^2 + y = -6$ hoặc $x^2 + y = 3$	
	Với $x^2 + y = -6$ hay $y = -x^2 - 6$ thế vào (1) được $x^4 + 7x^2 + 18 = 0$ (pt vô nghiệm)	0,25
	Với $x^2 + y = 3$ hay $y = 3 - x^2$ thế vào (1) được $x^4 - 2x^2 = 0$, giải phương trình được $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$	0,25
	Với $x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 3$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y_{2,3} = 1$. Vậy hệ có 3 nghiệm $(x; y)$ là $(0; 3), (-\sqrt{2}; 1), (\sqrt{2}; 1)$	0,25
16 (1,0 đ)	Hai phương trình $x^2 + mx + n = 0$ và $x^2 + mx - n = 0$ đều có nghiệm nguyên do đó $\Delta_1 = m^2 - 4n$ và $\Delta_2 = m^2 + 4n$ đều chính phương	0,25
	+ Với m chẵn $\Rightarrow mn : 2$	0,25
	+ Với m lẻ $\Rightarrow \Delta_2$ lẻ, mà m^2 và Δ_2 chính phương nên $m^2 \equiv 1 \pmod{8}$ và $\Delta_2 \equiv 1 \pmod{8}$ suy ra $4n = m^2 - \Delta_2 : 8$ dẫn đến $n : 2 \Rightarrow mn : 2$ (1)	
	+) Với $m : 3 \Rightarrow mn : 3$	0,5
	+) Với m không chia hết cho 3 $\Rightarrow m^2 \equiv 1 \pmod{3}$	

Câu	Sơ lược lời giải / Một số gợi ý chính	Điểm																				
	<p>- Nếu $n \equiv 1(\text{mod } 3) \Rightarrow \Delta_2 = m^2 + 4n \equiv 2(\text{mod } 3)$ vô lý vì Δ_2 chính phương</p> <p>- Nếu $n \equiv -1(\text{mod } 3) \Rightarrow \Delta_1 = m^2 - 4n \equiv 2(\text{mod } 3)$ vô lý vì Δ_1 chính phương.</p> <p>Vậy $n \vdots 3 \Rightarrow mn \vdots 3$ kết hợp với (1) và do $(2;3)=1$ nên $mn \vdots 6$</p>																					
17 (1,0 đ)	$pa^2 - 3a = 6q + 2p \Leftrightarrow p(a^2 - 2) = 3(a + 2q) \Rightarrow p(a^2 - 2) \vdots 3$	0,25																				
	Do a^2 chia 3 không bao giờ dư 2 nên $a^2 - 2$ không chia hết cho 3, mà 3 nguyên tố nên $p \vdots 3$ suy ra $p = 3$	0,25																				
	Phương trình trở thành $a^2 - 2 = a + 2q$ hay $a^2 - a - 2 = 2q \Leftrightarrow (a+1)(a-2) = 2q$ $\Rightarrow a+1$ và $a-2$ là ước của $2q$. Do q nguyên tố nên $U(2q) = (\pm 1; \pm 2; \pm q; \pm 2q)$, lại có $a+1 > a-2$ và $q \geq 2$ nên ta có bảng	0,5																				
	<table><tr><td>$a+1$</td><td>$2q$</td><td>-1</td><td>q</td><td>-2</td></tr><tr><td>$a-2$</td><td>1</td><td>$-2q$</td><td>2</td><td>$-q$</td></tr><tr><td>a</td><td>3</td><td>-2</td><td>4</td><td>-3</td></tr><tr><td>q</td><td>2</td><td>2</td><td>5</td><td>5</td></tr></table>		$a+1$	$2q$	-1	q	-2	$a-2$	1	$-2q$	2	$-q$	a	3	-2	4	-3	q	2	2	5	5
	$a+1$		$2q$	-1	q	-2																
$a-2$	1	$-2q$	2	$-q$																		
a	3	-2	4	-3																		
q	2	2	5	5																		
Vậy các số $(p; q; a)$ cần tìm là $(3; 2; 3), (3; 2; -2), (3; 5; 4)$ và $(3; 5; -3)$																						
18 (6,0 đ)	$\cos \angle BAD = \frac{AD}{AB}$ a) $\triangle ADB$ vuông tại D nên	0,5																				
	Tứ giác $BCDE$ có $\angle BDC = \angle BEC = 90^\circ$ nên nội tiếp $\Rightarrow \angle ADE = \angle ABC$	0,5																				
	$\triangle ADE$ và $\triangle ABC$ có $\angle A$ chung, $\angle ADE = \angle ABC$ nên $\triangle ADE \sim \triangle ABC$	0,5																				
	AI, AK là hai trung tuyến của hai tam giác đồng dạng ADE và ABC nên $\frac{AD}{AB} = \frac{AI}{AK}$. Vậy $\cos \angle BAC = \frac{AI}{AK}$.	0,5																				
	b) AP là đường kính của (O) nên $\angle ACP = \angle ABP = 90^\circ$ hay $PC \perp AC$ và $PB \perp AB$ mà $BD \perp AC$ và $CE \perp AB$ nên $BH \parallel PC$ và $CH \parallel PB$. Vậy tứ giác $BHCP$ là hình bình hành	0,5																				
	Mà K là trung điểm của đường chéo BC nên K là trung điểm của đường chéo PH nên P, K, H thẳng hàng (1)	0,5																				
	Tứ giác $BCDE$ nội tiếp $\Rightarrow MB \cdot MC = ME \cdot MD$, lại có A, C, B, N cùng thuộc (O) nên $MB \cdot MC = MN \cdot MA$. Vậy $ME \cdot MD = MN \cdot MA \Rightarrow$ tứ giác $ADEN$ nội tiếp (2)	0,5																				
	Có $\angle ADH = \angle AEH = 90^\circ$ nên tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH , kết hợp với (2) suy ra N thuộc đường tròn đường kính $AH \Rightarrow \angle ANH = 90^\circ$ hay $HN \perp AN$. Có N thuộc đường tròn đường kính AP nên $\angle ANP = 90^\circ$ hay $PN \perp AN$. Vậy P, H, N thẳng hàng, kết hợp với (1) suy ra 4 điểm P, K, H, N thẳng hàng.	0,5																				
	c) Tứ giác $BCDE$ nội tiếp nên $\angle BDE = \angle BCE; \angle DEC = \angle DBC \Rightarrow \triangle HDE \sim \triangle HCB$ mà HI, HK là hai trung tuyến của hai tam giác HDE, HCB nên $\triangle HIE \sim \triangle HKB$	0,5																				
	$\Rightarrow \angle EHI = \angle BHK$ lại có $\angle BHK = \angle NHD$ (đối đỉnh) nên $\angle EHI = \angle NHD$ mà $\angle EHI = \angle EHN + \angle NHI$ và $\angle NHD = \angle DHI + \angle NHI$ nên $\angle EHN = \angle IDH$	0,5																				
	N, E, H, D cùng thuộc đường tròn đường kính AH nên $\angle ENH = \angle EDH$ $\triangle HEN$ và $\triangle HID$ có $\angle EHN = \angle IDH$ và $\angle ENH = \angle IDH$ nên $\triangle HEN \sim \triangle HID$ $\Rightarrow \frac{EH}{EN} = \frac{IH}{ID}$ mà $ID = IE$ nên $\frac{EH}{EN} = \frac{IH}{IE}$	0,5																				
	Tứ giác $DHEN$ nội tiếp nên $\angle NED = \angle NHD$ mà $\angle NHD = \angle EHI$ nên $\angle EHI = \angle NEI$	0,5																				

Câu	Sơ lược lời giải / Một số gợi ý chính	Điểm
	$\triangle IHE$ và $\triangle IEN$ có $\angle EHI = \angle NEI$ và $\frac{EH}{EN} = \frac{HI}{IE}$ suy ra $\triangle IHE \sim \triangle IEN \Rightarrow \angle HIE = \angle EIN$ hay IM là phân giác của $\angle HIN$.	
19 (1,0 đ)	Giả sử $M = \{a_1; a_2; \dots; a_9\}$ *) Nếu trong M có số 0. Hiển nhiên **) Trong M không có số 0, a_i không có ước nguyên tố lớn hơn 5 nên khi phân tích a_i ra thừa số nguyên tố ta có $a_i = 2^{\alpha_i} \cdot 3^{\beta_i} \cdot 5^{\chi_i}$ với $\alpha_i; \beta_i; \chi_i$ là các số tự nhiên do đó α_i chỉ có thể chẵn hoặc lẻ, β_i chỉ có thể chẵn hoặc lẻ, χ_i chỉ có thể chẵn hoặc lẻ nên $(\alpha_i; \beta_i; \chi_i)$ chỉ có thể là một trong 8 bộ (chẵn; chẵn; chẵn), (chẵn; chẵn; lẻ), (chẵn; lẻ; chẵn), (chẵn; lẻ; lẻ), ...	0,5
	Vậy trong 9 bộ $(\alpha_i; \beta_i; \chi_i)$ có hai bộ có tính chẵn lẻ giống nhau, giả sử đó là $(\alpha_m; \beta_m; \chi_m)$ và $(\alpha_n; \beta_n; \chi_n)$ khi đó $a_m \cdot a_n = 2^{\alpha_m + \alpha_n} \cdot 3^{\beta_m + \beta_n} \cdot 5^{\chi_m + \chi_n}$ trong đó $\alpha_m + \alpha_n; \beta_m + \beta_n; \chi_m + \chi_n$ đều là số chẵn nên $a_m \cdot a_n$ là số chính phương.	0,5

Hình vẽ cho câu 18



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THCS NĂM 2025

Môn thi: TOÁN - Bảng B

Ngày thi: 06/3/2025

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi này có 02 trang)

PHẦN I: TRẮC NGHIỆM (6,0 điểm). (Mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm)

$$\frac{159}{121} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\vdots}}$$

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$$

Câu 1. Biết

A. 14.

B. 21.

C. 9.

D. 20.

Câu 2. Cho a là một nghiệm âm của phương trình

$$\sqrt{(x-3)(x-6)} - 4\sqrt{3-x} = 0$$

thức $a^2 - a$ là

. Giá trị của biểu

A. 110.

B. 120.

C. 80.

D. 90.

Câu 3. Nếu a, b là các số tự nhiên sao cho $\sqrt{7+\sqrt{48}} = a + \sqrt{b}$ thì $a^2 + b^2$ bằng

A. 10.

B. 13.

C. 25.

D. 34.

Câu 4. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 2m^2x + 3my = 4 \\ 2x - my = 2m^2 \end{cases}$$
. Giá trị của tham số m để hệ phương trình nhận cặp số $(2; 2)$ làm nghiệm là

A. -2.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 5. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Xác suất của biến cố "2 người được chọn đều là nam" là

A. $\frac{1}{15}$.

B. $\frac{7}{45}$.

C. $\frac{7}{15}$.

D. $\frac{5}{7}$.

Câu 6. Có ba chiếc hộp: hộp thứ nhất chứa 6 bi xanh được đánh số từ 1 đến 6, hộp thứ hai chứa 5 bi đỏ được đánh số từ 1 đến 5, hộp thứ ba chứa 4 bi vàng được đánh số từ 1 đến 4. Lấy ngẫu nhiên ba viên bi. Số kết quả thuận lợi của biến cố "Ba bi được chọn vừa khác màu vừa khác số" là

A. 60.

B. 64.

C. 84.

D. 120.

Câu 7. Cho $M = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$ với $xy > 0$. Giá trị nhỏ nhất của M là

A. 2.

B. $\frac{9}{4}$.

C. $\frac{12}{5}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Câu 8. Nghiệm nguyên dương của phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ là cặp số nguyên dương $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $ax_0 + by_0 = c$. Số nghiệm nguyên dương của phương trình $2x + 3y = 25$ là

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Câu 9. Tam giác ABC cân tại A có $AB = 7, BC = 5$, số đo của $\angle A$ (làm tròn đến phút) là

A. $46^{\circ}51'$.

B. $46^{\circ}31'$.

C. $41^{\circ}31'$.

D. $41^{\circ}51'$.

Câu 10. Tam giác ABC có $AB = 5, AC = 6, \angle A = 39^{\circ}$, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (làm tròn đến hàng phần trăm) bằng

A. 3,01.

B. 2,91.

C. 3,91.

D. 2,78.

Câu 11. Có bao nhiêu cách xếp 9 quả bóng giống nhau vào 3 chiếc hộp khác nhau sao cho mỗi hộp chứa ít nhất một quả bóng?

A. 18659.

B. 168.

C. 28.

D. 12.

Câu 12. Đa thức $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 3, $f(x)$ chia cho $x-3$ dư 2. Dư trong phép chia $f(x)$ cho x^2-5x+6 là

A. $x-5$ B. $3x+2$ C. $-3x+2$ D. $-x+5$

PHẦN II: TỰ LUẬN (14,0 điểm).

Câu 13 (2,0 điểm). Cho các số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn $2xy + yz + 2zx = 0$ và $2x + y + 4z = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$.

Câu 14 (1,5 điểm). Giải phương trình $x^2 - 16x - 12 + 8\sqrt{3(x+1)} = 0$.

Câu 15 (1,5 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y^2 - (2y-7)x = 8 \\ 2 + x(y+x) = 0 \end{cases}$.

Câu 16 (1,0 điểm). Cho số nguyên m sao cho hai phương trình $x^2 + 2x - 2m = 0$ và $x^2 + 2x - 3m = 0$ đều có nghiệm nguyên. Chứng minh m chia hết cho 8.

Câu 17 (1,0 điểm). Tìm số nguyên tố p và số nguyên a , biết $pa^2 - 3a = 2p$.

Câu 18 (6,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , hai đường cao BD , CE cắt nhau tại H . Hai đường thẳng DE và BC cắt nhau tại M , đoạn thẳng AM cắt đường tròn (O) tại N (N khác A). Gọi I , K thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng DE và BC . Vẽ đường kính AP của đường tròn (O) . Chứng minh:

- a) $\cos \angle BAC = \frac{DE}{BC}$;
b) $IK \parallel AP$;
c) Bốn điểm P , K , H , N thẳng hàng.

Câu 19 (1,0 điểm). Cho tập hợp M có 5 phần tử là các số tự nhiên, không có số nào có ước nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng có thể tìm được hai phần tử khác nhau của M mà tích của chúng là số chính phương.

----- HẾT -----

- Thí sinh được sử dụng máy tính cầm tay;
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí của Giám thị 1: Chữ kí của Giám thị 2:

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
CẤP TỈNH TRUNG HỌC CƠ SỞ NĂM 2025**

Môn thi: **TOÁN** - Bảng B

Ngày thi: **06/3/2025**

(Hướng dẫn này có 03 trang)

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

1. Giám khảo chấm đúng theo hướng dẫn của Sở Giáo dục và Đào tạo.
2. Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm thi.
3. Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

II. ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM: Mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	A	A	B	A	C	B	D	B	D	A	C	D

PHẦN II. TỰ LUẬN:

Câu	Sơ lược lời giải / Một số gợi ý chính	Điểm
13 (2,0 đ)	Từ $2xy + yz + 2zx = 0 \Rightarrow 2zx = -y(2x + z)$ (1) Từ $2x + y + 4z = 0 \Rightarrow y = -2x - 4z$ (2) thế vào (1) được $2zx = (2x + 4z)(2x + z) \Leftrightarrow zx = (2x + z)(2z + x)$ $\Leftrightarrow x^2 + z^2 + 2zx = 0 \Leftrightarrow (x + z)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -z$	1,0
	Thế vào (2) được $y = -2z$	0,5
	Vậy $P = \frac{x^2 + y^2}{z^2} = \frac{z^2 + 4z^2}{z^2} = 5$	0,5
14 (1,5 đ)	ĐKXD: $x \geq -1$	0,25
	$x^2 - 16x - 12 + 8\sqrt{3}(x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) - (12x + 12 - 8\sqrt{3}x + 3 + 4) = 0$ $\Leftrightarrow (x - 2)^2 - (2\sqrt{3}x + 3 - 2)^2 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = (2\sqrt{3}x + 3 - 2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2\sqrt{3}x + 3 - 2 \\ x - 2 = 2 - 2\sqrt{3}x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3}x + 3 \\ 2\sqrt{3}x + 3 = 4 - x \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 12x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2 - 20x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + 4\sqrt{3} \\ x = 10 - 4\sqrt{6} \end{cases}$ (Thỏa mãn điều kiện) $S = \{10 - 4\sqrt{6}; 6 + 4\sqrt{3}\}$	0,25
15 (1,5 đ)	Vậy Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} x^2y^2 - 2xy + 1 = -7x + 9 \\ 2 + x(x + y) = 0 \end{cases}$	0,5

Câu	Sơ lược lời giải / Một số gợi ý chính	Điểm
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-xy)^2 = -7x+9 \\ xy = -x^2-2 \quad (2) \end{cases}$ <p>Suy ra $(x^2+3)^2 = -7x+9 \Leftrightarrow x^4+6x^2+7x=0$</p> $\Leftrightarrow x(x+1)(x^2-x+7)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$ <p>Với $x=0$, thay vào (2) không tìm được y. Với $x=-1$, thay vào (2) ta có $y=3$. Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(-1;3)$.</p>	
16 (1,0 đ)	Hai phương trình $x^2+2x-2m=0$ và $x^2+2x-3m=0$ đều có nghiệm nguyên do đó $\Delta'_1=1+2m=a^2$ và $\Delta'_2=1+3m=b^2$ ($a,b \in \mathbb{Z}$)	0,25
	Từ $a^2=1+2m$ là số chính phương lẻ nên $1+2m \equiv 1 \pmod{8}$ (1) hay $2m \equiv 8$ suy ra m chẵn	0,25
	Do đó $b^2=1+3m$ là số chính phương lẻ nên $1+3m \equiv 1 \pmod{8}$ kết hợp với (1) suy ra $m \equiv 8$	0,5
17 (1,0 đ)	$pa^2-3a=2p \Leftrightarrow p(a^2-2)=3a \Rightarrow p(a^2-2) \vdots 3$	0,25
	Do a^2 chia cho 3 không bao giờ dư 2 nên a^2-2 không chia hết cho 3, mà 3 nguyên tố nên $p \vdots 3 \Rightarrow p=3$	0,5
	Với $p=3$ phương trình trở thành $a^2-a-2=0$, giải phương trình được $a_1=-1; a_2=2$ thỏa mãn. Vậy các số $(p;a)$ là $(3;-1)$ và $(3;2)$	0,25
18 (6,0 đ)	a) ΔADB vuông tại D nên $\cos \widehat{BAD} = \frac{AD}{AB}$ (1)	0,5
	Tứ giác $BCDE$ có $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ nên nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ABC}$	0,5
	ΔADE và ΔABC có $\widehat{A}$ chung, $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ nên $\Delta ADE \sim \Delta ABC$	0,5
	$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$, kết hợp với (1) được $\cos \widehat{BAC} = \frac{DE}{BC}$	0,5
	b) ΔBCE vuông tại E , trung tuyến EK nên $EK = \frac{1}{2}BC$, tương tự suy ra $KE = KD$ nên ΔKED cân có KI là trung tuyến. Vậy $KI \perp DE$ (2)	1,0
	Gọi G là giao của AP và DE . Tứ giác $BCDE$ nội tiếp nên $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{APC}$ (nội tiếp (O) cùng chắn $\widehat{AC}$) nên $\widehat{ADG} = \widehat{APC}$	0,5
	ΔADG và ΔAPC có $\widehat{A}$ chung, $\widehat{ADG} = \widehat{APC}$ nên $\widehat{AGD} = \widehat{ACP}$ mà $\widehat{ACP}$ nội tiếp đường tròn đường kính AP nên $\widehat{ACP} = 90^\circ$. Vậy $\widehat{AGD} = 90^\circ$ hay $AP \perp DE$, kết hợp với (2) suy ra $IK \parallel AP$	0,5
	c) AP là đường kính của (O) nên $\widehat{ACP} = \widehat{ABP} = 90^\circ$ hay $PC \perp AC$ và $PB \perp AB$ mà $BD \perp AC$ và $CE \perp AB$ nên $BH \parallel PC$ và $CH \parallel PB$. Vậy tứ giác $BHCP$ là	0,5

Câu I (4,0 điểm).

1. Rút gọn biểu thức
$$P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2(1-x)}{\sqrt{x}-1},$$
 với $x > 0$ và $x \neq 1$.

2. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 9$; $a + b + c = 59$ và $abc = 4$. Tính giá trị của biểu thức
$$T = \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 8} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 8} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 8}.$$

Câu II (2,0 điểm). Trong một hộp có chứa 2025 viên bi có cùng kích thước và khối lượng (mỗi viên bi chỉ có đúng một màu) trong đó có 750 viên bi màu đỏ, 700 viên bi màu xanh, 502 viên bi màu tím và 73 viên bi còn lại là các viên bi màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất 1 viên bi).

1. Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi trong hộp. Tính xác suất để lấy được viên bi màu xanh.

2. Người ta lấy ra từ hộp 134 viên bi bất kì. Chứng minh rằng trong số các viên bi vừa lấy ra có ít nhất 21 viên bi cùng màu.

Câu III (3,0 điểm).

1. Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x + 2025} = x + \sqrt{x^2 + 2025}.$

2. Cho phương trình $3x^2 + 2(2m^2 - 4m + 3)x + 1 - m = 0$ (m là tham số). Tìm điều kiện của tham số m để phương trình đã cho có 2 nghiệm trái dấu. Khi đó, chứng minh giá trị tuyệt đối của nghiệm âm lớn hơn nghiệm dương.

Câu IV (2,0 điểm). Lúc 8 giờ sáng, một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B với khoảng cách là 15km. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường, do xe bị hỏng nên người đó phải dừng lại sửa xe mất 30 phút rồi đi tiếp trên đoạn đường còn lại với vận tốc kém vận tốc lúc đầu là 5km/h. Khi đến B , người đó nghỉ lại 20 phút rồi trở về A với vận tốc bằng một nửa vận tốc đi trên $\frac{1}{3}$ quãng đường AB đầu tiên. Biết người đó trở về A lúc 11 giờ 15 phút sáng cùng ngày. Hỏi xe đạp hỏng lúc mấy giờ?

Câu V (2,0 điểm). Cho 2 số tự nhiên a, b thỏa mãn: $\frac{a^3}{a+b}$ và $\frac{b^3}{a+b}$ đều là số nguyên tố. Chứng minh rằng $a^2 + 3ab + 3a + b + 1$ là số chính phương.

Câu VI (7,0 điểm).

1. Cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm P cố định ($0 < OP < R$). Hai dây cung AB và CD của (O) thay đổi sao cho AB vuông góc với CD tại P . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC, AD . Đường thẳng FP cắt BC tại N .

a) Chứng minh $\square EOF = \square CBD$ và $PN^2 = BN \cdot NC$.

b) Chứng minh F luôn nằm trên một đường tròn cố định.

c) Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{AC \cdot AD + BC \cdot BD}{AC \cdot BC + AD \cdot BD}$, biết $AB = R\sqrt{3}, OP = \frac{R}{2}$.

2. Cho tam giác ABC , điểm M thay đổi nằm trong tam giác ABC và D, E, F là hình chiếu của điểm M lần lượt trên BC, CA, AB . Gọi a, b, c, x, y, z lần lượt là độ dài các đoạn thẳng BC, CA, AB, MD, ME, MF . Tìm vị trí của điểm M để biểu thức $P = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

--- HẾT ---

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Người coi thi số 1: Người coi thi số 2:

UBND TỈNH HÀ NAM

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS CẤP TỈNH

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

NĂM HỌC 2024 – 2025

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút

(không kể thời gian phát đề)

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Hướng dẫn chấm gồm 07 trang)

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì vẫn được điểm theo thang điểm tương ứng.
- Đối với bài toán hình học nếu học sinh chứng minh có sử dụng đến hình vẽ thì yêu cầu phải vẽ hình, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.
- Điểm toàn bài không làm tròn.

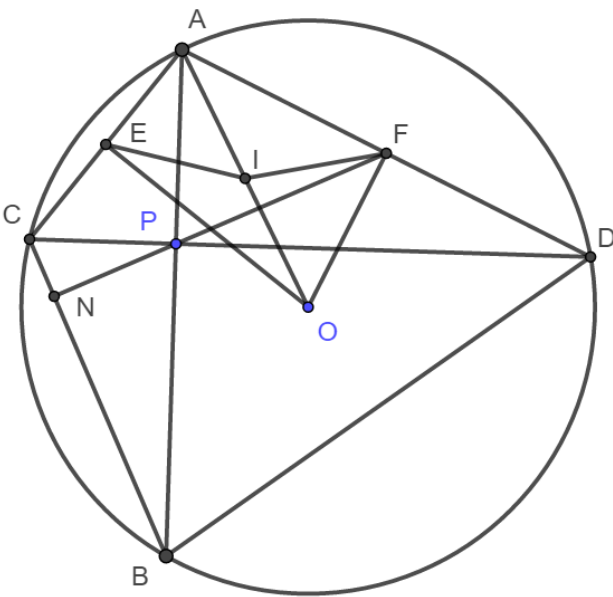
II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

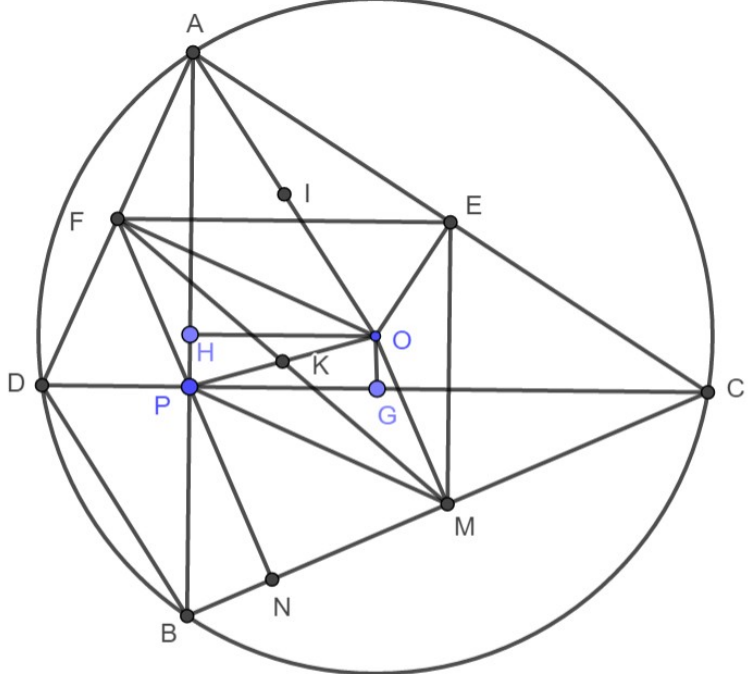
Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
I. (4.0 điểm)	$P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2(1-x)}{\sqrt{x}-1}$, với $x > 0$ và $x \neq 1$.	
	1. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x} \left[(\sqrt{x})^3 - 1 \right]}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1}$	1,0

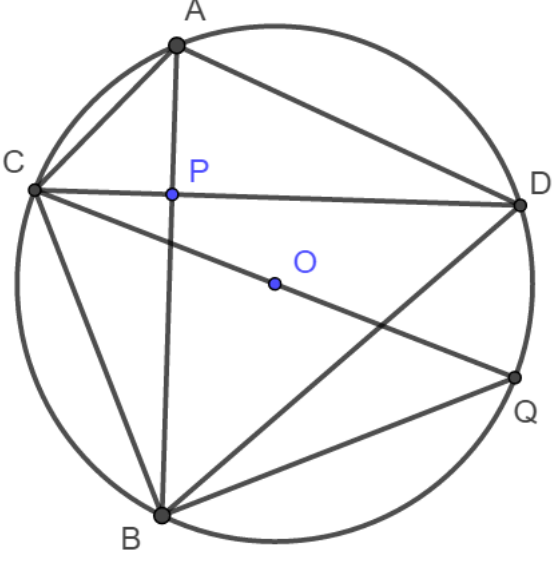
Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	$= \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}+1)$	0,5
	$= x+1$	0,5
	2. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 9$; $a+b+c = 59$ và $abc = 4$. Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 8} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 8} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 8}$	
	$+)\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 9 \Rightarrow a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca} = 81$ $\Rightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 11, \text{ do } a+b+c = 59$	0,5
	$+)\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 9 \Rightarrow \sqrt{c} - 8 = 1 - \sqrt{a} - \sqrt{b}$ $\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 8 = \sqrt{ab} + 1 - \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)$ $\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 8 = (\sqrt{b}-1)(\sqrt{c}-1), \sqrt{ca} + \sqrt{b} - 8 = (\sqrt{c}-1)(\sqrt{a}-1)$ Tương tự	0,5
	$T = \frac{1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)} + \frac{1}{(\sqrt{b}-1)(\sqrt{c}-1)} + \frac{1}{(\sqrt{c}-1)(\sqrt{a}-1)}$ $= \frac{\sqrt{c}-1 + \sqrt{a}-1 + \sqrt{b}-1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)(\sqrt{c}-1)}$	0,5
	$= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) - 3}{\sqrt{abc} - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) + (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) - 1} = \frac{9-3}{\sqrt{4} - 11 + 9 - 1} = -6$	0,5
II. (2,0 điểm)	Trong một hộp có chứa 2025 viên bi có cùng kích thước và khối lượng (mỗi viên bi chỉ có đúng một màu) trong đó có 750 viên bi màu đỏ, 700 viên bi màu xanh, 502 viên bi màu tím và 73 viên bi còn lại là các viên bi màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất 1 viên bi). 1. Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi trong hộp. Tính xác suất để lấy được viên bi màu xanh.	
	2. Người ta lấy ra từ hộp 134 viên bi bất kì. Chứng minh rằng trong số các viên bi vừa lấy ra có ít nhất 21 viên bi cùng màu.	
	1. Số cách lấy một viên bi bất kỳ là 2025 nên số phần tử của không gian mẫu là 2025	0,25
	Biến cố A: "Lấy được viên bi màu xanh" Số cách lấy được viên bi màu xanh là 700 nên số kết quả thuận lợi của biến cố A là 700	0,25
	Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{700}{2025} = \frac{28}{81}$	0,5
	2. Khi lấy 134 viên bi bất kỳ có thể lấy ít nhất $134 - 73 = 61$ viên bi gồm 3 màu: Đỏ, xanh, tím Do $61 : 3 = 20 \text{ dư } 1$	0,5
	Vậy trong 134 viên bi lấy ra có ít nhất $20 + 1 = 21$ viên bi cùng màu	0,25
III. (3,0)	1. Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x+2025} = x + \sqrt{x^2 + 2025}$.	
	Điều kiện $x + 2025 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2025$	0,25

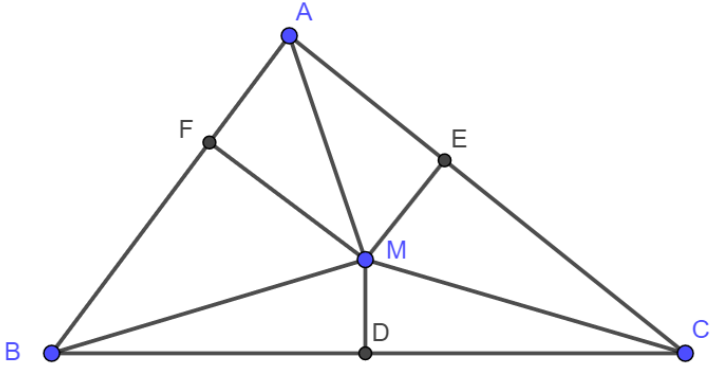
Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
điểm)	$x^2 + \sqrt{x+2025} = x + \sqrt{x^2+2025}$ $x^2 - x = \sqrt{x^2+2025} - \sqrt{x+2025}$ $x^2 - x = \frac{(x^2+2025) - (x+2025)}{\sqrt{x^2+2025} + \sqrt{x+2025}}$	0,25
	$(x^2 - x) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+2025} + \sqrt{x+2025}} \right) = 0$	0,25
	$x^2 - x = 0 \quad (1) \text{ hoặc } 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+2025} + \sqrt{x+2025}} = 0 \quad (2)$	
	$x = 0, x = 1$ (thỏa mãn điều kiện)	0,25
	Giải phương trình (1) ta được hai nghiệm	
	Biến đổi phương trình (2) ta được $\sqrt{x^2+2025} + \sqrt{x+2025} = 1$ $\sqrt{x^2+2025} \geq \sqrt{2025} > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+2025} + \sqrt{x+2025} > 1$ nên phương	0,25
	Nhận thấy trình (2) vô nghiệm	
	$x = 0, x = 1$	0,25
	Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm	
	2. Cho phương trình $3x^2 + 2(2m^2 - 4m + 3)x + 1 - m = 0$ (m là tham số). Tìm điều kiện của tham số m để phương trình đã cho có 2 nghiệm trái dấu. Khi đó, chứng minh giá trị tuyệt đối của nghiệm âm lớn hơn nghiệm dương.	
	Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi $3(1-m) < 0$ hay $m > 1$	0,5
	Khi đó, phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 0 < x_2$	0,25
	$x_1 + x_2 = \frac{-2(2m^2 - 4m + 3)}{3} = \frac{-4(m-1)^2 - 2}{3} < 0$	0,5
	Theo định lí Viète, ta có	
	Vậy giá trị tuyệt đối của nghiệm âm lớn hơn nghiệm dương	0,25
IV. (2,0 điểm)	Lúc 8 giờ sáng, một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B với khoảng cách là 15 km. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường, do xe bị hỏng nên người đó phải dừng lại sửa xe mất 30 phút rồi đi tiếp trên đoạn đường còn lại với vận tốc kém vận tốc lúc đầu là 5 km/h. Khi đến B, người đó nghỉ lại 20 phút rồi trở về A với vận tốc bằng một nửa vận tốc đi trên $\frac{1}{3}$ quãng đường AB đầu tiên. Biết người đó trở về A lúc 11 giờ 15 phút sáng cùng ngày. Hỏi xe đạp hỏng lúc mấy giờ?	
	Đổi: 30 phút = $\frac{1}{2}$ h; 20 phút = $\frac{1}{3}$ h;	0,25
	Gọi vận tốc xe đạp đi trên $\frac{1}{3}$ quãng đường đầu tiên là v (đơn vị: km/h; điều	0,25

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	kiện: $v > 5$) Vận tốc xe đạp trên $\frac{2}{3}$ quãng đường còn lại là $v - 5 \text{ (km/h)}$ Vận tốc xe đạp đi từ B về A là $\frac{v}{2} \text{ (km/h)}$ Khoảng thời gian từ 8h đến 11h 15' là 3h 15'	0,25
	Tổng thời gian xe chạy từ A đến B và quay về A là $\frac{13}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{29}{12} \text{ h}$ $\frac{5}{v} + \frac{10}{v-5} + \frac{15}{\frac{v}{2}} = \frac{29}{12}$ Theo bài ra ta có phương trình	0,5
	Biến đổi phương trình ta được $29v^2 - 685v + 2100 = 0$ $v = 20; v = \frac{105}{29}$ Giải phương trình ta được nghiệm	0,25
	Do $v > 5$ nên $v = 20$. Vậy vận tốc của xe đạp đi $\frac{1}{3}$ quãng đường AB đầu tiên là 20 km/h	0,25
	Thời gian của xe đạp đi $\frac{1}{3}$ quãng đường AB đầu tiên là $\frac{5}{20} = \frac{1}{4} \text{ h} = 15 \text{ phút}$	
	Kết luận: Xe đạp hỏng lúc 8h 15	0,25
V. (2,0 điểm)	Cho 2 số tự nhiên a, b thỏa mãn: $\frac{a^3}{a+b}$ và $\frac{b^3}{a+b}$ đều là số nguyên tố. Chứng minh rằng $a^2 + 3ab + 3a + b + 1$ là số chính phương.	
	Do $\frac{a^3}{a+b}$ và $\frac{b^3}{a+b}$ đều là số nguyên tố nên $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$	0,25
	+) Giả sử $\frac{a^3}{a+b} = p, p$ là số nguyên tố Ta được $a^3 = p(a+b) \Rightarrow a^3 : p \Rightarrow a : p$ vì p là số nguyên tố Lại có $\frac{a^3}{a+b} = p \Rightarrow \frac{a^2}{p} = \frac{a+b}{a} \Rightarrow \frac{a^2}{p} = 1 + \frac{b}{a}$ Mà $\frac{a^2}{p} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 + \frac{b}{a} \in \mathbb{Z} \Rightarrow b : a$ (1)	0,75
	+) Tương tự, từ $\frac{b^3}{a+b}$ là số nguyên tố ta cũng được $a : b$ (2) Từ (1) và (2) ta được $a = b$.	0,5
	Do đó $a^2 + 3ab + 3a + b + 1 = a^2 + 3a^2 + 3a + a + 1 = (2a+1)^2$ $\Rightarrow a^2 + 3ab + 3a + b + 1$ là số chính phương	0,5
VI.	1. Cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm P cố định ($0 < OP < R$).	

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
(7,0 điểm)	<p>Hai dây cung AB và CD của (O) thay đổi sao cho AB vuông góc với CD tại P. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC, AD. Đường thẳng FP cắt BC tại N.</p> <p>a) Chứng minh $\widehat{EOF} = \widehat{CBD}$ và $PN^2 = BN \cdot NC$.</p> <p>b) Chứng minh F luôn nằm trên một đường tròn cố định.</p> <p>c) Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{AC \cdot AD + BC \cdot BD}{AC \cdot BC + AD \cdot BD}$, biết $AB = R\sqrt{3}, OP = \frac{R}{2}$.</p>	
	<p>a) Chứng minh $\widehat{EOF} = \widehat{CBD}$ và $PN^2 = BN \cdot NC$.</p> 	
	<p>Chứng minh $\widehat{EOF} = \widehat{CBD}$.</p> <p>$E$ là trung điểm của $AC \Rightarrow OE \perp AC$. Gọi I là trung điểm $\Rightarrow IE = IA = IO$ (1)</p> <p>F là trung điểm của $AD \Rightarrow OF \perp AD \Rightarrow IF = IA = IO$ (2)</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $AEOF$ nội tiếp đường tròn tâm I</p> <p>$\Rightarrow \widehat{EOF} + \widehat{EAF} = 180^\circ$ (3)</p> <p>Mà tứ giác $ACBD$ nội tiếp nên $\widehat{CBD} + \widehat{EAF} = 180^\circ$ (4)</p> <p>Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{EOF} = \widehat{CBD}$.</p>	0,5
	<p>+ Chứng minh $PN^2 = BN \cdot NC$</p> <p>ΔAPD vuông tại P có trung tuyến $PF \Rightarrow PF = \frac{1}{2}AD$</p> <p>mà $AF = \frac{1}{2}AD \Rightarrow AF = PF \Rightarrow \Delta APF$ cân tại $F \Rightarrow \widehat{APF} = \widehat{FAP}$</p>	0,25
	<p>Lại có $\widehat{PCB} = \widehat{FAP}$ (cùng chắn cung BD) $\Rightarrow \widehat{APF} = \widehat{PCB}$</p>	0,25

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	<p>Mặt khác $\angle CPN = \angle FPD$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \angle APF + \angle FPD = \angle PCB + \angle CPN$ $\Rightarrow \angle APD = \angle PCB + \angle CPN$ $\Rightarrow \angle PCN + \angle CPN = 90^\circ \Rightarrow \angle CNP = 90^\circ \Rightarrow FP \perp BC$</p>	0,25
	<p>Tam giác PBC vuông tại P có đường cao PN nên $PN^2 = BN \cdot NC$</p>	0,25
	b) Chứng minh F luôn nằm trên một đường tròn cố định.	
		
	<p>Gọi M là trung điểm của BC Chứng minh tương tự câu a) ta được $PM \perp AD$ Lại có $OF \perp AD$ nên $OF \parallel PM$ (5) Tương tự $PF \parallel OM$ (6)</p>	0,25
	<p>Từ (5) và (6) suy ra tứ giác $PFOM$ là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của OP thì K là trung điểm của FM EM là đường trung bình của tam giác ABC nên $EM \parallel AB$ EF là đường trung bình của tam giác ACD nên $EF \parallel CD$ Do $AB \perp CD \Rightarrow EF \perp EM$ $FM^2 = EF^2 + EM^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + CD^2)$</p>	0,25
	<p>+ Tính $AB^2 + CD^2$ Nếu AB, CD không đi qua O, kẻ $OG \perp CD, OH \perp AB \Rightarrow AB = 2AH, CD = 2DG$ và $OHPG$ là hình chữ nhật $AB^2 + CD^2 = 4(AH^2 + DG^2) = 4(R^2 - OH^2 + R^2 - OG^2) = 4(2R^2 - OP^2)$ Nếu AB hoặc CD qua O thì ta cũng tính được $AB^2 + CD^2 = 4(2R^2 - OP^2)$ Vậy $AB^2 + CD^2 = 4(2R^2 - OP^2)$</p>	0,5
	<p>Do đó ta được $FM^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + CD^2) = 2R^2 - OP^2$</p>	0,25

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	$\Rightarrow 4KF^2 = 2R^2 - OP^2 \Rightarrow KF = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OP^2}$	
	<p>Do đoạn thẳng OP cố định nên K cố định và $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OP^2}$ không đổi</p> <p>Vậy F nằm trên đường tròn tâm K bán kính $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OP^2}$</p>	0,25
c)	<p>Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{AC \cdot AD + BC \cdot BD}{AC \cdot BC + AD \cdot BD}$, biết</p> <p>$AB = R\sqrt{3}, OP = \frac{2R}{3}$.</p>	
		
	<p>Tam giác ABC có $CP \perp AB$ tại P nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CP$ (7)</p> <p>$\triangle ACP$ vuông tại P nên $CP = AC \sin \angle CAP$ hay $CP = AC \sin \angle CAB$ (8)</p> <p>Kẻ đường kính CQ của đường tròn $(O; R)$</p> <p>$\angle CAB = \angle CQB$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BC)</p> <p>$\angle CBQ = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)</p> <p>$\triangle BCQ$ vuông tại B có $\sin \angle BQC = \frac{BC}{CQ} = \frac{BC}{2R}$ (9)</p> <p>$\triangle ABC$ vuông tại B có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \frac{CB}{2R} = \frac{AB \cdot AC \cdot CB}{4R}$</p> <p>Từ (7); (8); (9) suy ra</p>	0,5
	<p>Chứng minh tương tự ta có:</p> <p>$S_{DAB} = \frac{DA \cdot AB \cdot BD}{4R}; S_{ACD} = \frac{AC \cdot CD \cdot DA}{4R}; S_{BCD} = \frac{BC \cdot CD \cdot DB}{4R}$</p> <p>Ta có: $S_{ACBD} = S_{CAB} + S_{DAB} = S_{ACD} + S_{BCD}$</p> <p>$\Rightarrow \frac{AB \cdot AC \cdot CB}{4R} + \frac{DA \cdot AB \cdot BD}{4R} = \frac{AC \cdot CD \cdot DA}{4R} + \frac{BC \cdot CD \cdot DB}{4R}$</p>	0,5

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	$AB(AC.CB + DA.DB) = CD(AC.AD + BC.BD) \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AC.AD + BC.BD}{AC.CB + DA.DB}$	0,25
	<p>Lại có</p> $AB^2 + CD^2 = 4(2R^2 - OP^2) \Rightarrow 3R^2 + CD^2 = 8R^2 - 4 \cdot \frac{4R^2}{9}$ $\Rightarrow CD^2 = \frac{29R^2}{9} \Rightarrow CD = \frac{R\sqrt{29}}{3} \Rightarrow T = \frac{AB}{CD} = \frac{R\sqrt{3}}{R\sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{87}}{29}$	0,25
	<p>2. Cho tam giác ABC, điểm M thay đổi nằm trong tam giác ABC và D, E, F là hình chiếu của điểm M lần lượt trên BC, CA, AB. Gọi a, b, c, x, y, z lần lượt là độ dài các đoạn thẳng BC, CA, AB, MD, ME, MF.</p> $P = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ <p>Tìm vị trí của điểm M để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất.</p>	
		
	$S = S_{ABC} = S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}by + \frac{1}{2}cz$	0,5
	$2S = ax + by + cz$ $\Rightarrow 2SP = (ax + by + cz) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right)$ $= a^2 + b^2 + c^2 + ab \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + bc \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + ac \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right)$	0,5
	<p>Với 2 số dương x, y ta luôn có</p> $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ <p>Tương tự ta cũng được</p> $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2; \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$	0,25
	$\Rightarrow 2SP \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$ $\Rightarrow P \geq \frac{(a + b + c)^2}{2S}$	0,5
	<p>Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z$ hay M là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$</p>	0,25

-----HẾT-----

HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH NĂM ĐỊNH NĂM HỌC 2024-2025

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c \neq 0$ và $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3$.

Chứng minh rằng $\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^5 = 1$.

2. Cho $x > 0, y > 0$ và $xy + \sqrt{(x^2 + 3)(y^2 + 3)} = 3\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = x\sqrt{y^2 + 3} + y\sqrt{x^2 + 3}.$$

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Có ba xe ô tô xuất phát cùng thời điểm từ vị trí A , chạy cùng một tuyến đường đi qua vị trí B . Trong mỗi giờ, xe thứ nhất chạy nhanh hơn xe thứ hai 15 km và chạy nhanh hơn xe thứ ba 5 km. Một người quan sát đứng tại B thấy rằng: Xe thứ hai tới B chậm hơn so với xe thứ nhất 28 phút và chậm hơn so với xe thứ ba 20 phút. Tìm tốc độ của mỗi xe ô tô theo đơn vị km/h (xem như cả ba xe đều duy trì tốc độ trên suốt hành trình từ A đến B).

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} + \frac{1}{xy} = 3 \\ 2x(x + y^2 - 1) = 2y^2 + y - 1. \end{cases}$$

2. Giải hệ phương trình

Câu 3. (3,0 điểm)

1. Chứng minh rằng với n là số nguyên thì

$$(n^4 - 1^3)(n^4 - 2^3)(n^4 - 3^3) \dots (n^4 - 2027^3) \text{ chia hết cho } 2027.$$

2. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - xy^2 - 2y + 2 = 0$.

Câu 4. (7,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, $AB = AC$ và $\angle BAC > 90^\circ$. Gọi H là trung điểm của cạnh BC và E là điểm chính giữa của cung lớn BC trên đường tròn (O) . Xét điểm M thay đổi trên cạnh BC sao cho $BM > MC$, D là giao điểm khác A của đường thẳng AM và đường tròn (O) , N là giao điểm của đường thẳng ED và đường thẳng BC .

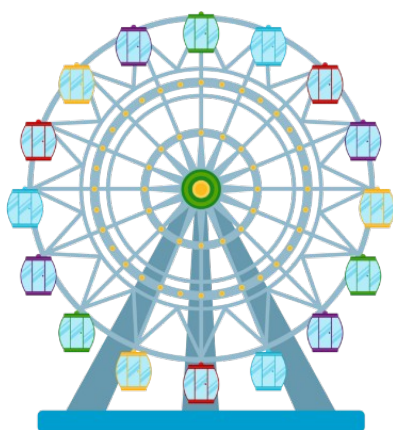
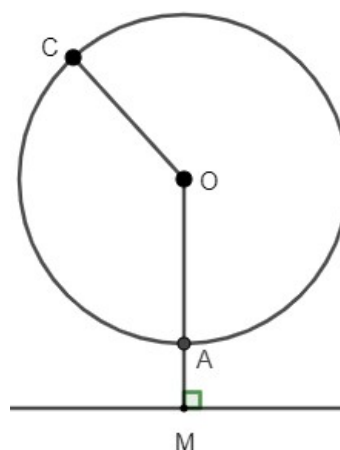
a) Chứng minh rằng $MA \cdot MD = MB \cdot MC$ và $BN \cdot CM = BM \cdot CN$.

b) Gọi J là giao điểm giữa đường thẳng BE và đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD ($J \neq B$). Chứng minh rằng đường thẳng MJ vuông góc với đường thẳng BC .

c) Cho biết $AB = \frac{R}{2}$. Khi biểu thức $f = 2AM + AD$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính tỉ số $\frac{OM}{f}$.

2. Bạn Joe và gia đình đang nghỉ dưỡng ở một khu sinh thái rộng lớn. Tại đây có một vòng quay mà trên đó có các cabin để du khách có thể ngắm nhìn phong cảnh toàn khu vực từ trong cabin của vòng quay (*tham khảo hình vẽ bên dưới*). Vòng quay ngoài cùng có dạng đường tròn với chu vi bằng 350 mét, tâm của vòng quay nằm ở độ cao 60 mét so với mặt đất. Mỗi cabin đều có đỉnh được gắn cố định vào vòng quay ngoài cùng và có một cơ cấu hạn chế rung lắc. Joe lựa chọn trải nghiệm vòng quay này, khi Joe vào một cabin ở vị trí thấp nhất A của vòng quay thì nó bắt đầu hành trình quay đều và duy trì ở tốc độ an toàn.

Bộ phận điều khiển cho biết với tốc độ đang quay, vòng quay sẽ đi hết một vòng trong thời gian 45 phút. Tính bán kính của vòng quay ngoài cùng và tính độ cao của đỉnh cabin C mà Joe ngồi so với mặt đất tại thời điểm 20 phút kể từ lúc Joe lên cabin theo đơn vị mét (kết quả tính làm tròn đến hàng phần chục).



Câu 5. (2,0 điểm)

1. Xét 100 số thực tùy ý có tổng bằng 0 và có tổng các bình phương của chúng bằng 1 . Gọi T là tích của số lớn nhất và số bé nhất trong 100 số đó. Tìm giá trị lớn nhất của T .

2. Cho bảng vuông kích thước 2025×2025 gồm 2025 dòng, 2025 cột, bảng được phân đều thành 2025^2 ô vuông con. Xét việc điền tất cả các số nguyên dương $1, 2, 3, \dots, 2025^2$ lên bảng theo ba điều kiện:

- Mỗi ô vuông con điền đúng một số, hai ô vuông con khác nhau điền hai số khác nhau.
- Hai số bất kì có hiệu bằng 1 thì được điền vào hai ô vuông con có chung cạnh.

- Hai số bất kì có hiệu chia hết cho 2025 thì được điền ở hai ô vuông con không cùng hàng và cũng không cùng cột.

Chứng minh rằng không thể điền được số lên bảng thỏa mãn tất cả các điều kiện trên.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....
 Chữ ký của CBCT số 1:..... Chữ ký của CBCT số 2:.....

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (4,0 điểm)

1.1. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a+b+c \neq 0$ và $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3$.

Chứng minh rằng $\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^5 = 1$.

Câu/Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1.1 (2,0đ)	+ Ta có $(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + c^3 + 3(a+b)c(a+b+c)$ $= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3(a+b)c(a+b+c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)[ab + c(a+b+c)]$ $= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$	0,5
	nên $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3$ tương đương với $3(a+b)(b+c)(c+a) = 0$	0,5
	+ Xét trường hợp $a+b=0$. Điều kiện $a+b+c \neq 0$ trở thành $c \neq 0$.	0,25
	Khi đó $\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^5 = \left(\frac{a}{0+c}\right)^5 + \left(\frac{-a}{0+c}\right)^5 + \left(\frac{c}{0+c}\right)^5$ $= \left(\frac{a}{c}\right)^5 - \left(\frac{a}{c}\right)^5 + 1 = 1$.	0,5
	+ Các trường hợp $b+c=0$ và $c+a=0$ xét tương tự cũng thu được kết quả $\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^5 = 1$. Vậy với giả thiết cho ta luôn có đẳng thức $\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^5 = 1$.	0,25

1.2. Cho $x > 0, y > 0$ và $xy + \sqrt{(x^2+3)(y^2+3)} = 3\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức
 $P = x\sqrt{y^2+3} + y\sqrt{x^2+3}$.

Câu/Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1.2 (2,0đ)	+ Từ giả thiết cho ta có $\left(xy + \sqrt{(x^2+3)(y^2+3)}\right)^2 = (3\sqrt{3})^2$ hay $x^2y^2 + (x^2+3)(y^2+3) + 2xy\sqrt{(x^2+3)(y^2+3)} = 27$ hay $2x^2y^2 + 3x^2 + 3y^2 + 2xy\sqrt{(x^2+3)(y^2+3)} = 18$	0,5
	+ Lại có $P^2 = x^2(y^2+3) + y^2(x^2+3) + 2xy\sqrt{(x^2+3)(y^2+3)}$ $= 2x^2y^2 + 3x^2 + 3y^2 + 2xy\sqrt{(x^2+3)(y^2+3)}$	0,5
	nên có $P^2 = 18$.	0,25
	+ Nhận xét $x > 0$ và $y > 0$ nên $P = x\sqrt{y^2+3} + y\sqrt{x^2+3} > 0$.	0,25

Suy ra $P = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.	0,5
--------------------------------------	-----

Câu 2. (4,0 điểm)

2.1. Có ba xe ô tô xuất phát cùng thời điểm từ vị trí A , chạy cùng một tuyến đường đi qua vị trí B . Trong mỗi giờ, xe thứ nhất chạy nhanh hơn xe thứ hai 15 km và chạy nhanh hơn xe thứ ba 5 km. Một người quan sát đứng tại B thấy rằng: Xe thứ hai tới B chậm hơn so với xe thứ nhất 28 phút và chậm hơn so với xe thứ ba 20 phút. Tìm tốc độ của mỗi xe ô tô theo đơn vị km/h (xem như cả ba xe đều duy trì tốc độ trên suốt hành trình từ A đến B).

Câu/Ý	Nội dung	Điểm
Câu 2.1 (2,0đ)	Gọi x km/h là tốc độ của xe thứ nhất, khi đó tốc độ của xe thứ hai là $x - 15$ km/h và tốc độ của xe thứ ba là $x - 5$ km/h, trong đó $x > 15$.	0,25
	Gọi S km là quãng đường từ A đến B theo tuyến đường đang xét ($S > 0$). Thời gian đi từ A đến B của xe thứ nhất là $\frac{S}{x}$ giờ, của xe thứ hai là $\frac{S}{x - 15}$ giờ, của xe thứ ba là $\frac{S}{x - 5}$ giờ.	0,25
	Xe thứ hai đến B chậm hơn so với xe thứ nhất 28 phút tức là $\frac{7}{15}$ giờ nên $\frac{S}{x - 15} - \frac{S}{x} = \frac{7}{15} \quad (1)$	0,5
	Xe thứ hai đến B chậm hơn so với xe thứ ba 20 phút tức là $\frac{1}{3}$ giờ nên $\frac{S}{x - 15} - \frac{S}{x - 5} = \frac{1}{3} \quad (2)$	
	Do $S > 0$ nên từ (1) và (2) ta có $\frac{1}{x - 15} - \frac{1}{x} = \frac{7}{5} \left(\frac{1}{x - 15} - \frac{1}{x - 5} \right)$	0,25
	hay $\frac{15}{(x - 15)x} = \frac{7}{5} \cdot \frac{10}{(x - 15)(x - 5)}$ hay $15(x - 5) = 14x$, giải được $x = 75$ (thỏa mãn $x > 15$).	0,5
	Vậy tốc độ của xe ô tô thứ nhất là 75 km/h, tốc độ của xe thứ hai là 60 km/h, tốc độ của xe thứ ba là 70 km/h.	0,25

2.2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} + \frac{1}{xy} = 3 \\ 2x(x + y^2 - 1) = 2y^2 + y - 1. \end{cases}$$

Câu/Ý	Nội dung	Điểm
Câu 2.2 (2,0đ)	Xét hệ $\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} + \frac{1}{xy} = 3 & (1) \\ 2x(x + y^2 - 1) = 2y^2 + y - 1 & (2). \end{cases}$, điều kiện xác định: $x \neq 0$ và $y \neq 0$.	0,25
	+ Phương trình (1) được viết lại thành $x^3 + y^3 + 1 = 3xy$ $(x + y)^3 + 1 - 3xy(x + y) - 3xy = 0$	0,25

$(x+y+1)\left[(x+y)^2-(x+y)+1\right]-3xy(x+y+1)=0$ $(x+y+1)\left[x^2+y^2-xy-x-y+1\right]=0$	
<p>+ Trường hợp 1: $x+y+1=0$, khi đó $x=-y-1$.</p> <p>Thay vào (2) ta được $2(-y-1)(-y-1+y^2-1)=2y^2+y-1$</p> <p>hay $2y^3+2y^2-5y-5=0$ hay $(y+1)(2y^2-5)=0$.</p>	0,25
<p>Tìm được $y=-1$, $y=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$.</p>	0,25
<p>Với $y=-1$ thì $x=-y-1=0$, không thỏa mãn điều kiện xác định.</p> <p>Với $y=\frac{\sqrt{10}}{2}$ thì $x=-y-1=-\frac{\sqrt{10}}{2}-1$, thỏa mãn điều kiện xác định.</p> <p>Với $y=-\frac{\sqrt{10}}{2}$ thì $x=-y-1=\frac{\sqrt{10}}{2}-1$, thỏa mãn điều kiện xác định.</p>	0,25
<p>+ Trường hợp 2: $x^2+y^2-xy-x-y+1=0$.</p> <p>Khi đó $2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+2=0$ hay $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=0$.</p>	0,25
<p>Tìm được $x=y=1$.</p> <p>Cặp số $(x;y)=(1;1)$ thỏa mãn (2) và điều kiện xác định của hệ đã cho.</p>	0,25
<p>Vậy hệ phương trình cho có đúng ba bộ nghiệm $(x;y)$ là</p> $(1;1), \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}-1; \frac{\sqrt{10}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{10}}{2}-1; -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$	0,25

Câu 3. (3,0 điểm)

3.1. Chứng minh rằng với n là số nguyên thì

$$(n^4-1^3)(n^4-2^3)(n^4-3^3)\dots(n^4-2027^3) \text{ chia hết cho } 2027.$$

Câu/Ý	Nội dung	Điểm
Câu 3.1 (1,0đ)	<p>Giả sử ngược lại, có số nguyên n mà các số $n^4-1^3, n^4-2^3, \dots, n^4-2027^3$ đều không chia hết cho 2027. Khi đó các số dư thu được khi chia mỗi số trong $n^4-1^3, n^4-2^3, \dots, n^4-2027^3$ cho 2027 đều thuộc tập hợp $\{1;2;\dots;2026\}$. Có 2027 số dư thuộc vào tập hợp có 2026 phần tử nên phải có hai số dư nào đó trùng nhau, nghĩa là tồn tại hai số nguyên dương a,b mà $1 \leq a < b \leq 2027$ và $n^4-a^3 \equiv n^4-b^3 \pmod{2027}$.</p>	0,25
	<p>Ta có $n^4-a^3 \equiv n^4-b^3 \pmod{2027}$ tương đương với $a^3 \equiv b^3 \pmod{2027}$.</p> <p>Suy ra $(a^3)^{675} \equiv (b^3)^{675} \pmod{2027}$ hay $a^{2025} \equiv b^{2025} \pmod{2027}$.</p>	0,25
	<p>Mặt khác 2027 là số nguyên tố, $1 \leq a < b \leq 2027$ nên $(a, 2027) = (b, 2027) = 1$, theo định lí Fermat có $a^{2026} \equiv 1 \equiv b^{2026} \pmod{2027}$.</p>	0,25
	<p>Từ đó suy ra $b^{2026} \equiv a^{2026} \equiv ab^{2025} \pmod{2027}$, dẫn đến $b^{2025}(b-a) \equiv 0 \pmod{2027}$. Kết</p>	0,25

hợp với $0 < b - a < 2027$ suy ra $b \equiv 2027$ hay có $b = 2027$.	
Khi đó a thỏa mãn $\begin{cases} 1 \leq a < 2027 \\ a^3 \equiv b^3 \equiv 0 \pmod{2027} \end{cases}$ hay $\begin{cases} 1 \leq a < 2027 \\ a \equiv 2027 \end{cases}$.	
Không có giá trị nào của a như thế.	
Vậy điều giả sử là sai, yêu cầu của bài toán được giải quyết.	

3.2. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - xy^2 - 2y + 2 = 0$.

Câu/Ý	Nội dung	Điểm
Câu 3.2 (2,0đ)	Phương trình cho tương đương với $4x^2 - 4xy^2 - 8y + 8 = 0$ hay $(2x - y^2)^2 = y^4 + 8y - 8$ (3).	0,25
	+ Nếu $y = 0$ thì vế phải của (3) nhận giá trị âm nên (3) không xảy ra.	0,25
	+ Nếu $y = 1$ thì (3) thành $(2x - 1)^2 = 1$, tìm được $x = 0$ hoặc $x = 1$.	0,5
	+ Với mọi $y > 1$, ta có: $y^4 + 8y - 8 = y^4 + 8(y - 1) > y^4$, $(y^2 + 1)^2 - (y^4 + 8y - 8) = 2y^2 - 8y + 9 = 2(y - 2)^2 + 1 > 0$ nên thu được $(y^2)^2 < y^4 + 8y - 8 < (y^2 + 1)^2$, chứng tỏ $y^4 + 8y - 8$ không là số chính phương, do đó (3) không xảy ra.	0,75
	Vậy có đúng hai cặp số tự nhiên thỏa mãn là $(x; y) = (0; 1)$, $(x; y) = (1; 1)$.	0,25

Câu 4. (7,0 điểm)

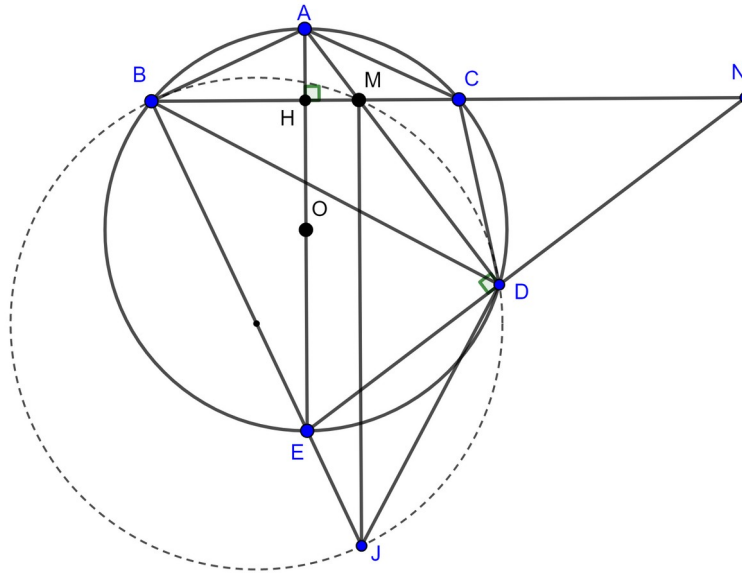
4.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, $AB = AC$ và $\angle BAC > 90^\circ$. Gọi H là trung điểm của cạnh BC và E là điểm chính giữa của cung lớn BC trên đường tròn (O) . Xét điểm M thay đổi trên cạnh BC sao cho $BM > MC$, D là giao điểm khác A của đường thẳng AM và đường tròn (O) , N là giao điểm của đường thẳng ED và đường thẳng BC .

a) Chứng minh rằng $MA \cdot MD = MB \cdot MC$ và $BN \cdot CM = BM \cdot CN$.

b) Gọi J là giao điểm khác B giữa đường thẳng BE và đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD , chứng minh rằng đường thẳng MJ vuông góc với đường thẳng BC .

c) Cho biết $AB = \frac{R}{2}$. Khi biểu thức $f = 2AM + AD$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính tỉ số $\frac{OM}{f}$.

Hình vẽ:

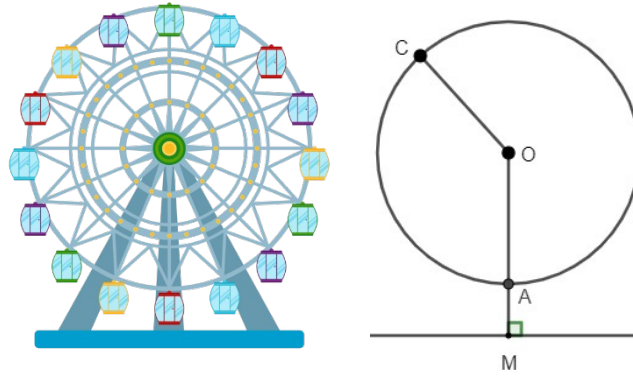


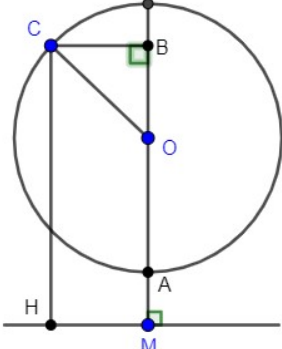
Câu/Ý	Nội dung	Điểm
Câu 4.1a (2,0đ)	a) + Ta có $\angle ABC = \angle ADC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC) hay $\angle ABM = \angle CDM$. Tương tự cũng có $\angle BAM = \angle DCM$. Suy ra hai tam giác ABM và CDM đồng dạng (g-g).	0,5
	Suy ra $\frac{AM}{CM} = \frac{BM}{DM}$ hay $MA \cdot MD = MB \cdot MC$.	0,25
	+ Ta có $\angle BDA = \angle BCA$ và $\angle CDA = \angle CBA$. Lại có tam giác ABC cân tại A nên $\angle BCA = \angle CBA$, từ đó suy ra $\angle BDA = \angle CDA$, dẫn đến DA là phân giác của góc $\angle CDB$.	0,25
	+ Có $AB = AC$, $OB = OC$, H là trung điểm của BC , E là điểm chính giữa của cung lớn BC nên suy ra A, H, O, E thẳng hàng (cùng nằm trên đường trung trực của BC) và khi đó có AE là đường kính của đường tròn (O) . Suy ra $\angle ADE = 90^\circ$ hay $DA \perp EN$, dẫn đến DN là phân giác ngoài tại đỉnh D của tam giác DBC .	0,5
	+ Theo tính chất đường phân giác có $\begin{cases} \frac{BM}{CM} = \frac{BD}{CD} \\ \frac{BN}{CN} = \frac{BD}{CD} \end{cases}$, suy ra $\frac{BM}{CM} = \frac{BN}{CN}$ hay $BM \cdot CN = BN \cdot CM$.	0,5
Câu 4.1b (1,0đ)	b) + Ta có $\angle CBE = \angle CAE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EC của (O)) hay $\angle MBJ = \angle CAH$. + Tương tự có $\angle MJB = \angle MDB = \angle ADB = \angle ACB = \angle ACH$.	0,5
	+ Từ đó suy ra $\angle MBJ + \angle MJB = \angle CAH + \angle ACH = 180^\circ - \angle AHC = 90^\circ$. Vậy $\angle BMJ = 180^\circ - (\angle MBJ + \angle MJB) = 90^\circ$, do đó $JM \perp BM$ hay $MJ \perp BC$.	0,5
Câu	c) Tam giác AHM và tam giác ADE có chung nhau góc ở đỉnh A và có	0,5

4.1c (2,0đ)	$\angle AHM = 90^\circ = \angle ADE$ nên chúng đồng dạng, suy ra $\frac{AH}{AD} = \frac{AM}{AE}$ hay $AM \cdot AD = AH \cdot AE$.	
	+ Tam giác ABE vuông tại B và BH là đường cao nên suy ra $AH = \frac{R^2}{4 \cdot 2R} = \frac{R}{8}$ và $AM \cdot AD = \frac{R^2}{4}$.	0,25
	+ Theo bất đẳng thức Cauchy có $f = 2AM + AD \geq 2\sqrt{2AM \cdot AD} = 2\sqrt{2 \cdot \frac{R^2}{4}} = R\sqrt{2}$ (*).	0,25
	+ Dấu bằng ở (*) xảy ra khi và chỉ khi $2AM = AD = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ hay $AM = \frac{R\sqrt{2}}{4}$. Ta thấy $\frac{R}{8} = AH < \frac{R\sqrt{2}}{4} = AM < AC = \frac{R}{2}$ nên tồn tại điểm M thuộc đoạn HC để các yêu cầu của đề bài được thỏa mãn và dấu bằng của (*) xảy ra. (Hoặc tính HC , HM khi $AM = \frac{R\sqrt{2}}{4}$, thấy $HM < HC$ nên tồn tại M).	0,25
	+ Khi f đạt giá trị nhỏ nhất bằng $R\sqrt{2}$ thì $AD = 2AM$, suy ra M là trung điểm của AD , dẫn đến OM là đường trung tuyến của tam giác cân OAD ($OA = OD$). Suy ra $OM \perp AD$ hay $OM \perp AM$. Suy ra $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{8}} = R\sqrt{\frac{7}{8}}$.	0,5
	+ Vậy $\frac{OM}{f} = \frac{R\sqrt{\frac{7}{8}}}{R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.	0,25

4.2. Bạn Joe và gia đình đang nghỉ dưỡng ở một khu sinh thái rộng lớn. Tại đây có một vòng quay mà trên đó có các cabin để du khách có thể ngắm nhìn phong cảnh toàn khu vực từ trong cabin của vòng quay (*tham khảo hình vẽ bên dưới*). Vòng quay ngoài cùng có dạng đường tròn với chu vi bằng 350 mét, tâm của vòng quay nằm ở độ cao 60 mét so với mặt đất. Mỗi cabin đều có đỉnh được gắn cố định vào vòng quay ngoài cùng và có một cơ cấu hạn chế rung lắc. Joe lựa chọn trải nghiệm vòng quay này, khi Joe vào một cabin ở vị trí thấp nhất A của vòng quay thì nó bắt đầu hành trình quay đều và duy trì ở tốc độ an toàn.

Bộ phận điều khiển cho biết với tốc độ đang quay, vòng quay sẽ đi hết một vòng trong thời gian 45 phút. Tính bán kính của vòng quay ngoài cùng và tính độ cao của đỉnh cabin C mà Joe ngồi so với mặt đất tại thời điểm 20 phút kể từ lúc Joe lên cabin theo đơn vị mét (kết quả tính làm tròn đến hàng phần chục).



Câu/Ý	Nội dung	Điểm
Câu 4.2 (2,0đ)	 <p>Bán kính của vòng quay ngoài cùng là</p> $R = \frac{C}{2\pi} = \frac{350}{2\pi} \approx 55,7 \text{ (m)}$	0,5
	<p>Ban đầu đỉnh cabin tại A, sau 20 phút đỉnh cabin đến vị trí C, tâm vòng quay là O, B là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng OM và H là hình chiếu vuông góc của C trên mặt đất.</p> <p>Đu quay thực hiện một vòng mất 45 phút, do đó trong thời gian 20 phút thì cabin sẽ quét một góc là $\frac{360^\circ}{45} \cdot 20 = 160^\circ$.</p> <p>Có $90^\circ < 160^\circ < 180^\circ$ nên có $\angle BOC = 180^\circ - \angle AOC = 20^\circ$.</p>	0,5
	<p>Tam giác OCB vuông tại B có</p> $OB = OC \cdot \cos \angle COB = R \cdot \cos 20^\circ = \frac{350}{2\pi} \cdot \cos 20^\circ$	0,5
	<p>Độ cao của đỉnh cabin C là</p> $CH = OM + OB = 60 + \frac{350}{2\pi} \cos 20^\circ \approx 112,3 \text{ (m)}.$	0,5

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Xét 100 số thực tùy ý có tổng bằng 0 và có tổng các bình phương của chúng bằng 1. Gọi T là tích của số lớn nhất và số bé nhất trong 100 số đó. Tìm giá trị lớn nhất của T.

Câu/Ý	Nội dung	Điểm
Câu 5.1 (1,0đ)	<p>Xét 100 số thực là $x_1, x_2, \dots, x_{100}$, trong dãy này có a là giá trị lớn nhất và b là giá trị nhỏ nhất và có</p> $x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 = 1$ $a \leq x_i \leq b \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, 100$ <p>+ Với mỗi i có $(x_i - a)(x_i - b) \leq 0$ hay $x_i^2 + ab \leq (a + b)x_i$.</p>	0,5
	<p>+ Cộng về 100 bất đẳng thức dạng trên ứng với các giá trị của i ta thu được</p> $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 + 100ab \leq (a + b)(x_1 + x_2 + \dots + x_{100})$	0,25

	$T = ab \leq -\frac{1}{100}$ hay $1+100ab \leq 0$, do đó có	
	+ Dấu bằng của bất đẳng thức trên có thể xảy ra, chẳng hạn khi ta chọn 100 số bao gồm 50 số có giá trị bằng $-\frac{1}{10}$ và 50 số có giá trị bằng $\frac{1}{10}$. Vậy giá trị lớn nhất của T là $-\frac{1}{100}$.	0,25

5.2. Cho bảng vuông kích thước 2025×2025 gồm 2025 dòng, 2025 cột, bảng được phân đều thành 2025^2 ô vuông con. Xét việc điền tất cả các số nguyên dương $1, 2, 3, \dots, 2025^2$ lên bảng theo ba điều kiện:

- Mỗi ô vuông con điền đúng một số, hai ô vuông con khác nhau điền hai số khác nhau.
- Hai số bất kì có hiệu bằng 1 thì được điền vào hai ô vuông con có chung cạnh.
- Hai số bất kì có hiệu chia hết cho 2025 thì được điền ở hai ô vuông con không cùng hàng và cũng không cùng cột.

Chứng minh rằng không thể điền được số lên bảng thỏa mãn tất cả các điều kiện trên.

Ý	Nội dung	Điểm
Câu 5.2 (1,0đ)	Giả sử điền được số vào bảng thỏa mãn cả ba điều kiện đã nêu. Đặt $n = 2025$. Quy ước đánh số thứ tự các hàng là $1, 2, \dots, n$ từ trên xuống dưới, đánh số thứ tự các cột là $1, 2, \dots, n$ từ trái qua phải. Với mỗi ô vuông con nằm ở hàng i và cột j , ta đặt tương ứng nó với trọng số $a_{ij} = i + j$.	0,25
	Xét tập hợp A gồm n ô con điền các số $1, 1+n, 1+2n, \dots, 1+(n-1)n$. Hiệu của hai số bất kì trong dãy này đều chia hết cho n nên A gồm n ô đôi một khác hàng và khác cột. Vậy tổng của tất cả các trọng số xét trên tập A là $T_A = 2(1+2+\dots+n)$.	0,25
	Xét tập hợp B gồm n ô con điền các số $2, 2+n, 2+2n, \dots, 2+(n-1)n$. Ta cũng có tổng của tất cả các các trọng số xét trên tập B là $T_B = 2(1+2+\dots+n)$. Suy ra $T_B - T_A = 0$.	0,25
	Mặt khác ta có sự tương ứng mỗi ô con trong A với một ô con trong B chung cạnh (vì có n cặp số liên tiếp là $(1; 2), (1+n; 2+n), \dots, (1+(n-1)n; 2+(n-1)n)$), khi đó với một ô có trọng số là a_{ij} ở trong A thì ô tương ứng của nó trong B có trọng số là $a_{ij} \pm 1$. Vậy hiệu $T_B - T_A$ biểu diễn được thành tổng của n số mà mỗi số có giá trị là 1 hoặc -1 . Điều này có nghĩa là giá trị 0 được viết thành tổng của n ($n = 2025$ lẻ) số lẻ, điều này không thể xảy ra. Vậy điều giả sử là sai, không thể điền số được theo các yêu cầu đã cho.	0,25

Chú ý: - Nếu thí sinh làm đúng mà cách giải khác với đáp án và phù hợp kiến thức của chương trình THCS thì tổ chấm thống nhất cho điểm thành phần đảm bảo tổng điểm như hướng dẫn quy định.
 - Tổng điểm toàn bài không làm tròn.

-----HẾT-----

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

(Đề thi gồm 05 câu, 02 trang)

Thời gian: **150** phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: **15/3/2025**

Câu 1 (4,0 điểm)

- Rút gọn biểu thức: $B = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{6}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Giải phương trình: $x - \sqrt{x - 15} = 17$
- Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + xy + y^2 = x + y$.

Câu 2 (6,0 điểm)

- Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x + y + 2xy = 2 \\ x^3 + y^3 = 8 \end{cases}$$

- Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m + 2)x - m^2 + 7$

Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt:

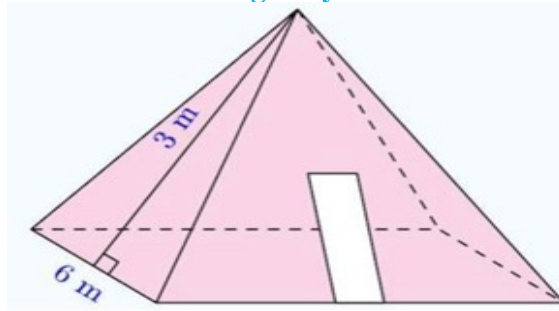
- Có hoành độ x_1, x_2 là hai số đối nhau.
- Có hoành độ x_1, x_2 là hai số trái dấu và số âm có giá trị tuyệt đối bằng nghịch đảo của số kia.

- Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác BD ($D \in AC$).

Chứng minh rằng: $\tan \frac{\angle ABC}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$

Câu 3 (4,0 điểm)

- Một kho chứa có dạng hình chóp tứ giác đều với độ dài cạnh đáy là 6 m và trung đoạn là 3 m. Người ta muốn sơn phủ bên ngoài cả ba mặt xung quanh của kho chứa đó và không sơn phủ phần cửa có diện tích là 7 m^2 . Biết rằng cứ mỗi mét vuông sơn cần trả 50000 đồng. Cần trả bao nhiêu tiền để hoàn thành việc sơn phủ đó?



2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình (hoặc hệ phương trình).

Cho 3 vòi A, B, C cùng chảy vào một bể không chứa nước. Biết vòi A và B chảy đầy bể trong 72 phút, vòi A và C chảy đầy bể trong 63 phút, vòi C và B chảy đầy bể trong 56 phút. Hỏi mỗi vòi chảy một mình trong bao lâu thì đầy bể? Cả 3 vòi cùng chảy đầy bể trong bao lâu?

3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì :

$$A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 \text{ là số chính phương.}$$

Câu 4 (4,0 điểm) Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao AD, BF, CE của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H .

a. Chứng minh tứ giác $BEHD$ và tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn.

b. Kéo dài AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K . Kéo dài KE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I . Gọi N là giao điểm của CI và EF . Chứng minh $CE^2 = CN \cdot CI$.

c. Kẻ OM vuông góc với BC tại M . Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Câu 5 (2,0 điểm)

1. Cho x, y, z là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(\frac{x}{y+z} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{y}{z+x} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{z}{x+y} + \frac{1}{2} \right).$$

2. Một túi chứa 3 viên bi màu xanh và một số viên bi màu đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Luân lấy ra ngẫu nhiên 01 viên bi. Biết rằng xác suất của biến cố “Lấy được viên bi màu đỏ” là 0,4. Hỏi trong túi có tổng bao nhiêu viên bi?

-----HẾT-----

UBND TỈNH HÒA BÌNH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THCS
NĂM HỌC 2024-2025

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Hướng dẫn chấm gồm 05 câu, 08
trang)

Môn: TOÁN

Thời gian: 150 phút

Ngày thi: 15/3/2025

Câu	Hướng dẫn chấm	Thang
-----	----------------	-------

		điểm
Câu 1 (4,0đ)	1. Ta có: $B = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)(2 - \sqrt{6})}{4 - 6} + \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 6} \cdot \frac{\sqrt{3}(2 + \sqrt{6}) + \sqrt{3}(2 - \sqrt{6})}{4 - 6} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ $B = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 2 + \sqrt{6}}{-2} + \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 6} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 4}{-2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5
	$B = \frac{-\sqrt{2} - 2 + \sqrt{6}}{-2} + \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot 3\sqrt{2}}{-6} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ $B = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{2} + \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5
	$B = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6} + \sqrt{6} - 2 - \sqrt{2}}{2} = 0$	0,5
	2. Điều kiện xác định: $x \geq 15$	0,25
	$x - \sqrt{x - 15} = 17$ $x - 15 - \sqrt{x - 15} - 2 = 0$	0,25
	Đặt $t = \sqrt{x - 15} \ (t \geq 0)$ Suy ra $t^2 - t - 2 = 0$ $(t - 2)(t + 1) = 0$ $\begin{cases} t = 2 \text{ (tmdk)} \\ t = -1 \text{ (ktm)} \end{cases}$	0,25
	Với $t = 2$ $\sqrt{x - 15} = 2$ $x - 15 = 4$ $x = 19 \text{ (tmdk)}$ Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 19$	0,25

	<p>3. $x^2 + x(y-1) + y^2 - y = 0$</p>	0,25
	<p>Điều kiện phương trình bậc 2 với ẩn x có nghiệm:</p> $\Delta = -3y^2 + 2y + 1 \geq 0$ $-\frac{1}{3} \leq y \leq 1 \quad (y \in \mathbf{Z})$ $\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$	0,5
	<p>• Với $y = 0$:</p> $x^2 - x = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$	0,25
	<p>• Với $y = 1$:</p> $x^2 = 0$ $x = 0$	0,25
	<p>Kết luận nghiệm:</p> $(x; y) = \{(0; 0), (0; 1), (1; 0)\}$	0,25
Câu 2 (6,0đ)	<p>1.</p> <p>Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = x \cdot y \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$ hệ phương trình đã cho trở thành:</p>	0,5
	$\begin{cases} S + 2P = 2 \\ S(S^2 - 3P) = 8 \end{cases}$ $2S^3 + 3S^2 - 6S - 16 = 0$	0,5
	$(S - 2)(2S^2 + 7S + 8) = 0$ <p>• TH: $2S^2 + 7S + 8 = 0$ (vô nghiệm)</p> <p>• TH: $S - 2 = 0$</p> $S = 2 \Rightarrow P = 0$	0,5
	<p>Suy ra x,y là nghiệm của phương trình:</p> $X^2 - 2X = 0$ $\begin{cases} X = 0 \\ X = 2 \end{cases}$	

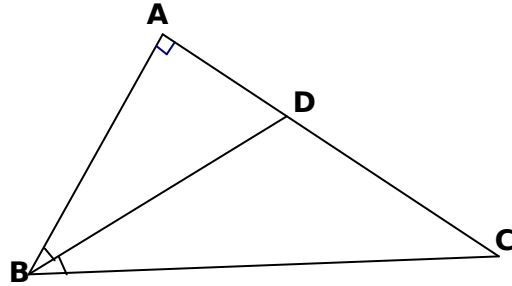
	<p>Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$</p>	0,5
2.	<p>Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):</p> $2x^2 = (m+2)x - m^2 + 7$ $2x^2 - (m+2)x + m^2 - 7 = 0 (*)$ <p>Để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt thì:</p> $\Delta = -7m^2 + 4m + 60 (**)$ <p>Vì $a.c < 0$ nên $(**)$ có nghiệm phân biệt.</p>	1,0
a.	<p>Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là hai số đối nhau.</p> <p>Khi phương trình $(*)$ có</p> $\begin{cases} 2(m^2 - 7) < 0 \\ \frac{m+2}{2} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\sqrt{7} < m < \sqrt{7} \\ m = -2 \end{cases}$ <p>Vậy $m = -2$</p>	0,5
b.	<p>Với $-\sqrt{7} < m < \sqrt{7}$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu.</p> <p>Với điều kiện này giả sử $x_1 < 0, x_2 > 0$ theo đề ra ta có</p>	0,25
	$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{x_2} \\ -x_1 x_2 &= 1 \\ -\left(\frac{m^2 - 7}{2}\right) &= 1 \\ 7 - m^2 &= 2 \\ m^2 &= 5 \\ m &= -\sqrt{5}; \quad m = \sqrt{5} \end{aligned}$	0,25

thoả mãn điều kiện - $\sqrt{7} < m < \sqrt{7}$

Kết luận : Vậy với $m = -\sqrt{5}; m = \sqrt{5}$ là giá trị cần tìm.

0,25

3.



0,25

Do BD là đường phân giác của ΔABC ($D \in AC$).

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có :

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \quad \text{Suy ra} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$$

0,5

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AD+DC}{AB+BC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AB+BC} \quad (1)$$

0,5

Xét ΔABD có $\angle BAD = 90^\circ$

$$\tan \angle ABD = \frac{AD}{AB} \quad (2)$$

0,5

Từ (1) và (2)

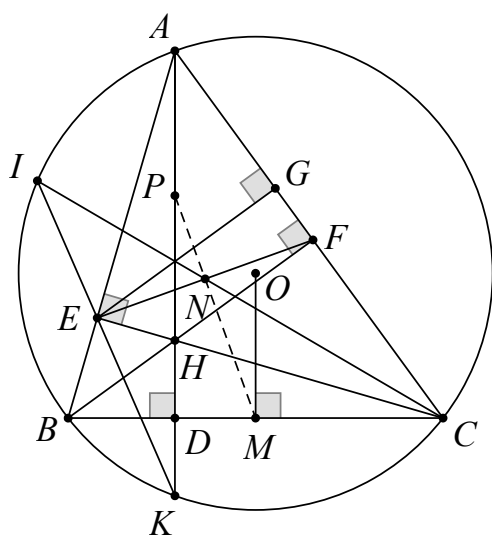
$$\tan \frac{\angle ABC}{2} = \frac{AC}{AB+BC} \quad (\text{đpcm})$$

0,25

Câu 3 1. Diện tích một mặt là:

(4,0đ	$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 6.3 = 9 \text{ (m}^2\text{)}$	0,5
	<ul style="list-style-type: none"> Trường hợp: Diện tích 3 mặt không có mặt chứa cửa: $S_2 = 3.S_1 = 27 \text{ (m}^2\text{)}$ 	0,25
	Tổng số tiền cần trả là: $T = 50000.27 = 1350000 \text{ (VND)}$	0,25
	<ul style="list-style-type: none"> Trường hợp: Diện tích 3 mặt có mặt chứa cửa là: $S = S_2 - 7 = 20 \text{ (m}^2\text{)}$ 	0,25
	Tổng số tiền cần trả là: $T = 50000.20 = 1000000 \text{ (VND)}$	0,25
	(HS giải đúng 1 trong 2 trường hợp vẫn cho điểm tối đa)	
	<p>2.</p> <p>Gọi x (phút) là thời gian vòi A chảy một mình đầy bể</p> <p>Mỗi phút vòi A chảy được $\frac{1}{x}$ (bể)</p> <p>Gọi y (phút) là thời gian vòi B chảy một mình đầy bể</p> <p>Mỗi phút vòi B chảy được $\frac{1}{y}$ (bể)</p> <p>Gọi z (phút) là thời gian vòi C chảy một mình đầy bể</p> <p>Mỗi phút vòi C chảy được $\frac{1}{z}$ bể)</p> <p>Điều kiện : $x > 0$; $y > 0$; $z > 0$.</p> <p>Ta có hệ phương trình :</p> $\begin{cases} 72\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \\ 63\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) = 1 \\ 56\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{y}\right) = 1 \end{cases}$	1,0
	<p>Giải hệ phương trình ta được : $x = 168$; $y = 126$; $z = \frac{504}{5}$</p> <p>Vậy vòi A chảy một mình đầy bể sau 168 phút; vòi B chảy đầy bể sau 126</p>	0,5

	phút ; vòi C chảy đầy bể sau $\frac{504}{5}$ phút	
	Nếu 3 vòi cùng mở 1 lúc thì sau mỗi phút chảy được: $\frac{3+4+5}{504} = \frac{12}{504}$ bể	0,25
	Vậy 3 vòi cùng chảy đầy bể sau : $\frac{504}{12} = 42$ phút	0,25
	3. Ta có : $A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 = (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$	0,5
	Đặt $x^2 + 5xy + 5y^2 = t (t \in \mathbb{Z})$ Khi đó : $A = (t - y^2)(t + y^2) + y^4 = t^2 - y^4 + y^4 = t^2$ Vậy $A = (x^2 + 5xy + y^2)^2$ là số chính phương.	0,5



a) Dễ thấy $\triangle EBH$ và $\triangle DBH$ lần lượt vuông tại E và D nên E; D thuộc đường tròn đường kính BH. Suy ra tứ giác $BEHD$ nội tiếp một đường tròn.	1,0
Chứng minh tương tự tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn.	1,0
b) Từ chứng minh trên tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn. $\angle FEH = \angle FAH$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{FH}$) hay $\angle CEN = \angle KAC$ (1) Xét (O) có $\angle KAC = \angle KIC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{KC}$)	0,5

<p>Câu 4 (4,0đ)</p>	<p>hay $\widehat{KAC} = \widehat{EIC} \quad (2)$</p>	
	<p>Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CEN} = \widehat{EIC}$</p> <p>Xét $\triangle CEN$ và $\triangle CIE$ có: $\widehat{ECI}$: chung; $\widehat{CEN} = \widehat{EIC}$ (cmt)</p> <p>Nên $\triangle CEN \sim \triangle CIE$ (g - g) Suy ra $\frac{CE}{CI} = \frac{CN}{CE} \Rightarrow CE^2 = CN \cdot CI$ (đpcm)</p>	0,5
	<p>c) Xét tam giác OBC cân tại O</p> <p>Vì $OM \perp BC$ tại M nên OM là đường cao của tam giác cân nên OM cũng là đường trung tuyến do đó M là trung điểm BC.</p> <p>Xét $\triangle EBC$ vuông tại E có M là trung điểm BC nên $ME = \frac{1}{2}BC$.</p> <p>Tương tự ta có $MF = \frac{1}{2}BC$. Do đó $ME = MF \left(= \frac{1}{2}BC \right)$</p> <p>suy ra M thuộc trung trực của EF</p> <p>Vì P là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$ nên $PE = PF$</p> <p>Suy ra P thuộc trung trực của EF. Vì vậy PM là trung trực của EF</p>	0,25
	<p>Để chứng minh M, N, P thẳng hàng ta đi chứng minh $N \in PM$.</p> <p>Kẻ $EG \perp AC, G \in AC$.</p> <p>Áp dụng hệ thức lượng vào $\triangle AEC$ vuông tại E, đường cao EG, ta có $CE^2 = CG \cdot CA$</p> <p>Theo phần b có $CE^2 = CN \cdot CI$ nên $CG \cdot CA = CN \cdot CI \Rightarrow \frac{CG}{CN} = \frac{CI}{CA}$.</p> <p>Xét $\triangle CNG$ và $\triangle CAI$ có $\frac{CG}{CN} = \frac{CI}{CA}$ (cmt) và $\widehat{ICA}$: chung</p> <p>$\triangle CNG \sim \triangle CAI$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NGC} = \widehat{CIA}$ (hai góc tương ứng) hay $\widehat{NGF} = \widehat{CIA}$ (*)</p> <p>Xét (O) có $\widehat{CIA} = \widehat{CBA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{CA}$) (**)</p>	0,25
	<p>Chứng minh được tứ giác $BEFC$ nội tiếp một đường tròn</p> <p>$\Rightarrow \widehat{EBC} + \widehat{EFC} = 180^\circ$ (hai góc đối nhau)</p> <p>Mà $\widehat{AFE} + \widehat{EFC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)</p>	0,25

	$\Rightarrow \angle EBC = \angle AFE$ hay $\angle ABC = \angle NFG$ (***)	
	<p>Từ (*), (**), (***) ta suy ra $\angle NGF = \angle NFG$</p> <p>Do đó $\triangle NGF$ cân tại N suy ra $NG = NF$</p> <p>Xét $\triangle EGF$ vuông tại G có $\angle NGF = \angle NFG$ nên $\angle NGE = \angle NEG$.</p> <p>Do đó $\triangle NGE$ cân tại N suy ra $NG = NE$</p> <p>Khi đó $NE = NF$ hay N là trung điểm EF (4)</p> <p>Từ (3) và (4) suy ra $N \in PM$ hay ba điểm M, N, P thẳng hàng.</p>	0,25
Câu 5 (2,0đ)	$P = \frac{(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y)}{8(x+y)(y+z)(z+x)} \quad (1)$ <p>1. Ta có</p>	0,25
	<p>Do x, y, z là các số dương.</p> <p>Theo bất đẳng thức Cô si ta có:</p> $2x+y+z = (x+y) + (x+z) \geq 2\sqrt{(x+y)(x+z)} \quad (2)$ $2y+z+x = (y+z) + (y+x) \geq 2\sqrt{(y+z)(x+y)} \quad (3)$ $2z+x+y = (z+x) + (z+y) \geq 2\sqrt{(z+x)(z+y)} \quad (4)$	0,25
	<p>Nhân từng vế của (2),(3),(4) và từ (1) suy ra $P \geq 1$ (5)</p>	0,25
	<p>Dấu “=” trong (5) xảy ra khi đồng thời có dấu “=” trong (2),(3),(4)</p> $\begin{cases} x+y = x+z \\ y+z = y+x \\ z+x = z+y \end{cases}$ $x = y = z$ <p>Từ đó suy ra $\min P = 1$</p>	0,25
	<p>2. Trong túi có 2 loại bi xanh và đỏ, xác suất lấy đc 1 viên bi đỏ là 0,4 thì xác suất lấy được 1 viên bi xanh là 0,6.</p>	0,25
	<p>Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố : “Lấy được viên bi màu xanh” là: viên bi xanh 1; viên bi xanh 2; viên bi xanh 3.</p> <p>Suy ra $n(A) = 3$</p>	0,25

	Suy ra: $P(A) = \frac{3}{n(\Omega)} = 0,6$	0,25
	Vậy trong túi có tổng số viên bi là: $n(\Omega) = \frac{3}{0,6} = 5$ (viên bi)	0,25

Ghi chú: Mọi cách giải khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu, Giám thị không giải thích gì thêm)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

Phòng thi:

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VĨNH LONG**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2024-2025**

Khóa thi ngày 16.3.2025

(Đề thi gồm 05 câu, 02 trang)

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (5.0 điểm)

$$A = \sqrt{21+12\sqrt{3}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}} - \sqrt{3}$$

a) Tính giá trị của biểu thức

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+7}{x-4\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$$

b) Cho biểu thức

với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$ Rút gọn biểu thức B và tìm các giá trị nguyên của x để B nhận giá trị nguyên.

$$C = 5x^2 - 5x + 20$$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Câu 2. (7.0 điểm)

$$x^2 - 7x + 30 = 6\sqrt{x+5}$$

a) Giải phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 2y + 3 = y^2 + 4x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

b) Giải hệ phương trình

Cho phương trình $x^2 + 2x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 . Không giải phương trình,

c)

$$M = \left(\frac{x_1^3}{x_2^4} + \frac{x_2^3}{x_1^4} \right)^2$$

hãy tính giá trị của biểu thức

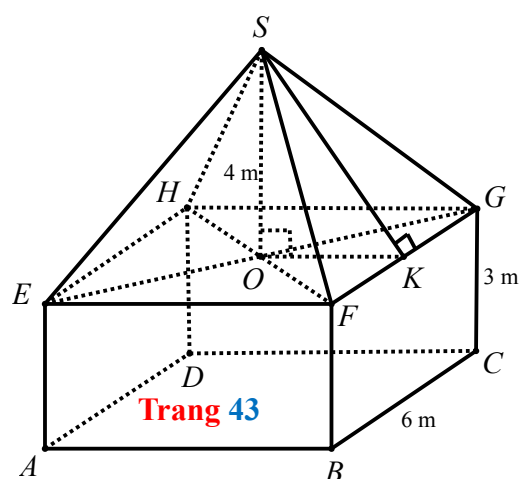
d) Đến kỷ niệm ngày Quốc tế Phụ nữ 8-3, một cửa hàng hoa ở Vĩnh Long đã nhập 500 giỏ hoa hồng từ Đà Lạt về để bán. Các giỏ hoa hồng được chuyển về đến cửa hàng vào sáng ngày 07/3/2025. Cửa hàng treo giá niêm yết bán một giỏ hoa hồng tăng 25% so với giá lúc nhập về. Đến hết ngày 08/3/2025, cửa hàng bán được 400 giỏ hoa hồng. Đến ngày 09/3/2025, cửa hàng treo bảng giá mới (giảm 50% so với giá lúc nhập về) và đã bán hết số giỏ hoa hồng còn lại. Hỏi giá một giỏ hoa hồng lúc cửa hàng nhập về là

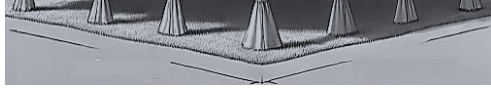
bao nhiêu? Biết cửa hàng khi bán hết 500 giỏ

hoa hồng thì lãi được 10 000 000 đồng.

Câu 3. (1.0 điểm)

Một chiếc lều có dạng như hình vẽ bên dưới.





Biết phần thân lều dạng hình hộp chữ nhật ABCD.EFGH, mặt đáy là hình vuông cạnh 6m, chiều cao 3m. Phần nóc lều dạng hình chóp tứ giác đều S.EFGH có chiều cao 4m.

- a) Tính thể tích không khí bên trong chiếc lều.
- b) Tính chi phí để mua vải bạt phủ nóc lều (không tính các mép dán), biết mỗi mét vuông vải bạt có giá 20 000 đồng và $SO \perp OK$.

Câu 4. (4.0 điểm)

Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Lấy điểm E thuộc cung nhỏ CB (E khác C và B). Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng AC và BE . Kẻ CH vuông góc với BF ($H \in BF$), BC cắt OH tại I . Chứng minh rằng:

- a) Bốn điểm C, H, B, O cùng nằm trên một đường tròn và HO là tia phân giác của $\angle CHB$.
- b) $CH \cdot CH = HF \cdot BI$.
- c) Ba điểm F, I, D thẳng hàng.

Câu 5. (3.0 điểm)

$$D = \frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$$

a) Chứng minh rằng biểu thức D luôn nhận giá trị nguyên với mọi n là số nguyên chẵn.

b) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4}(a+b+c)$$

- HẾT -

- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay và tài liệu.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP TỈNH

VĨNH LONG

NĂM HỌC 2024-2025

Khóa thi ngày: 16.3.2025

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN**

(Hướng dẫn chấm có 06 trang)

Câu 1. (5.0 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{21+12\sqrt{3}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}} - \sqrt{3}$.

b) Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+7}{x-4\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$.

Rút gọn biểu thức B và tìm các giá trị nguyên của x để B nhận giá trị nguyên.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = 5x^2 - 5x + 20$.

Câu		Điểm
1		5.0
	$\sqrt{21+12\sqrt{3}} = \sqrt{(2\sqrt{3}+3)^2}$ <p>a) Ta có</p>	0.5
	$= 2\sqrt{3} + 3$	0.25

$\sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{(5-\sqrt{3})^2}$	0.5
$= 5 - \sqrt{3}$	0.25
$A = 2\sqrt{3} + 3 + 5 - \sqrt{3} - \sqrt{3}$	0.25
$A = 8$	0.25
$B = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+7}{x-4\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$ <p>b)</p> $= \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x}+7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)} : \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$	0.5
$= \frac{x-9-x+1+\sqrt{x}+7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}$	0.25
$= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$	0.25
<p>Ta có</p> $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$	0.25
Để B nhận giá trị nguyên khi $\sqrt{x}-3 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$	0.25
<p>Khi đó $\sqrt{x}-3=1$ suy ra $x=16$ (nhận)</p> <p>$\sqrt{x}-3=-1$ suy ra $x=4$ (nhận)</p> <p>$\sqrt{x}-3=2$ suy ra $x=25$ (nhận)</p> <p>$\sqrt{x}-3=-2$ suy ra $x=1$ (loại)</p> <p>$\sqrt{x}-3=4$ suy ra $x=49$ (nhận)</p> <p>$\sqrt{x}-3=-4$ suy ra $\sqrt{x}=-1$ (loại)</p> <p>Vậy $x \in \{4; 16; 25; 49\}$ thì B nhận giá trị nguyên.</p>	0.5

	$C = 5x^2 - 5x + 20 = 5\left(x^2 - x + 4\right) = 5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{75}{4} \geq \frac{75}{4}$	0.5
	<p>c)</p> <p>Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$</p> <p>Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức C bằng $\frac{75}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$.</p>	0.5

Câu 2. (7.0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 - 7x + 30 = 6\sqrt{x+5}$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 2y + 3 = y^2 + 4x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

c) Cho phương trình $x^2 + 2x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 . Không giải phương

trình, hãy tính giá trị của biểu thức

$$M = \left(\frac{x_1^3}{x_2^4} + \frac{x_2^3}{x_1^4} \right)^2$$

d) Đến kỷ niệm ngày Quốc tế Phụ nữ 8-3, một cửa hàng hoa ở Vĩnh Long đã nhập 500

giỏ hoa hồng từ Đà Lạt về để bán. Các giỏ hoa hồng được chuyển về đến cửa hàng vào sáng ngày 07/3/2025. Cửa hàng treo giá niêm yết bán một giỏ hoa hồng tăng 25% so với giá lúc nhập về. Đến hết ngày 08/3/2025, cửa hàng bán được 400 giỏ hoa hồng. Đến ngày 09/3/2025, cửa hàng treo bảng giá mới (giảm 50% so với giá lúc nhập về) và đã bán hết số giỏ hoa hồng còn lại. Hỏi giá một giỏ hoa hồng lúc cửa hàng nhập về là bao nhiêu? Biết cửa hàng khi bán hết 500 giỏ hoa hồng thì lãi được 10000000 đồng.

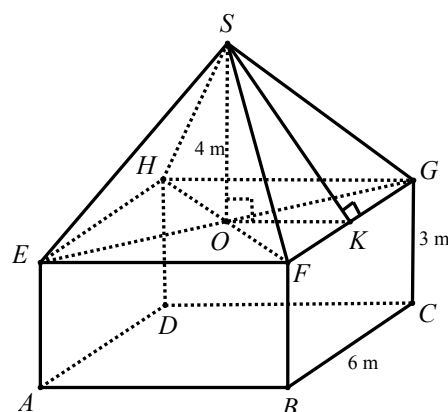
2		7.0
	<p>a) $x^2 - 7x + 30 = 6\sqrt{x+5}$ Điều kiện $x \geq -5$</p>	0.25
	$(\sqrt{x+5} - 3)^2 + (x - 4)^2 = 0$	0.5
	$\begin{cases} \sqrt{x+5} - 3 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases}$	0.25

$\begin{cases} \sqrt{x+5} = 3 \\ x = 4 \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = 4 \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad x = 4 \text{ (nhận)}$ <p>Vậy $x = 4$ là nghiệm của phương trình.</p>	0.5
<p>b) Giải hệ phương trình</p> $\begin{cases} x^2 + 2y + 3 = y^2 + 4x & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$ <p>Từ (1) suy ra $(x-2)^2 - (y-1)^2 = 0$</p>	0.5
$(x-y-1)(x+y-3) = 0$ $x = y+1 \quad \text{hoặc} \quad x = 3-y$	0.5
<p>Thế $x = y+1$ vào (2) ta được $2y^2 + 2y - 4 = 0$</p> <p>Suy ra $y = 1$ suy ra $x = 2$ $y = -2$ suy ra $x = -1$</p>	0.5
<p>Thế $x = 3-y$ vào (2) ta được $2y^2 - 6y + 4 = 0$</p> <p>Suy ra $y = 1$ suy ra $x = 2$ $y = 2$ suy ra $x = 1$</p> <p>Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(2;1), (-1;-2), (1;2)$.</p>	0.5
<p>c) Ta có $x_1 + x_2 = -2$, $x_1 \cdot x_2 = -1$</p>	0.25
<p>Ta có $x_1 + x_2 = -2$ suy ra $x_1^2 + x_2^2 = 4 - 2x_1x_2 = 4 - 2(-1) = 6$</p> $x_1^4 + x_2^4 = 36 - 2(x_1x_2)^2 = 36 - 2(-1)^2 = 34$	0.25
<p>Ta lại có $x_1 + x_2 = -2$ suy ra</p> $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = (-2)^3 - 3(-1)(-2) = -14$	0.25
$(x_1^3 + x_2^3)(x_1^4 + x_2^4) = (-14) \cdot 34$ $x_1^7 + x_1^3x_2^3(x_2 + x_1) + x_2^7 = -476$ $x_1^7 + x_2^7 = -476 - x_1^3x_2^3(x_2 + x_1) = -476 - (-1)^3(-2) = -478$	0.5

	$M = \left(\frac{x_1^3}{x_2^4} + \frac{x_2^3}{x_1^4} \right)^2 = \left(\frac{x_1^7 + x_2^7}{x_1^4 x_2^4} \right)^2 = \left(\frac{-478}{(-1)^4} \right)^2 = (478)^2 = 228484$	0.25
	<p>Khi đó</p> <p>d) Gọi giá của một giỏ hoa hồng lúc cửa hàng nhập về là x (đồng), $x > 0$</p> <p>Giá của một giỏ hoa hồng khi tăng 25% so với giá của cửa hàng lúc nhập về là $125\%x$ (đồng)</p> <p>Giá của một giỏ hoa hồng khi giảm 50% so với giá của cửa hàng lúc nhập về là $50\%x$ (đồng)</p>	0.5
	<p>Theo đề bài ta có phương trình</p> $125\%x \cdot 400 + 50\%x \cdot 100 - 500x = 10000000$	0.5
	$500x + 50x - 500x = 10000000$ $50x = 10000000$ $x = 200000$	0.5
	<p>Vậy giá của một giỏ hoa hồng lúc cửa hàng nhập về là 200000 (đồng).</p>	0.5

Câu 3. (1.0 điểm)

Một chiếc lều có dạng như hình vẽ bên dưới.



Biết

phần

thân lều dạng hình hộp chữ nhật ABCD.EFGH, mặt đáy là hình vuông cạnh 3 m , chiều cao 3 m . Phần nóc lều dạng hình chóp tứ giác đều S.EFGH có chiều cao 4 m .

a) Tính thể tích không khí bên trong chiếc lều.

b) Tính chi phí để mua vải bạt phủ nóc lều (không tính các mép dán), biết mỗi mét vuông vải bạt có giá 20 000 đồng và $SO \perp OK$.

3		1.0
	<p>a) Thể tích không khí bên trong chiếc lều</p> $\frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 + 6^2 \cdot 3 = 156$ <p style="text-align: center;">(m³)</p>	0.5
	<p>Chiều cao mặt bên xuất phát từ đỉnh hình chóp</p> $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ <p style="text-align: center;">m</p>	0.25
	<p>Diện tích xung quanh nóc lều</p> $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ <p style="text-align: center;">(m²)</p> <p>Chi phí để mua vải bạt phủ nóc lều</p> $60 \cdot 20\,000 = 1\,200\,000$ <p style="text-align: center;">(đồng).</p>	0.25

Câu 4. (4.0 điểm)

Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Lấy điểm E thuộc cung nhỏ CB (E khác C và B). Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng AC và BE . Kẻ CH vuông góc với BF ($H \in BF$), BC cắt OH tại I . Chứng minh rằng:

- a) Bốn điểm C, H, B, O cùng nằm trên một đường tròn và HO là tia phân giác của $\angle CHB$.
- b) $CH \cdot CH = HF \cdot BI$.
- c) Ba điểm F, I, D thẳng hàng.

4		4.0
---	--	-----

$\frac{HF}{HC} = \frac{CF}{BC} \quad \text{mà} \quad \frac{CI}{BI} = \frac{HF}{HC} \quad \text{nên} \quad \frac{CF}{BC} = \frac{CI}{BI}$ <p>suy ra</p> $\text{Mà } BC = BD \quad \text{nên} \quad \frac{CF}{BD} = \frac{CI}{BI}$	
<p>Xét $\triangle CFI$ vuông tại C và $\triangle BDI$ vuông tại B có $\frac{CF}{BD} = \frac{CI}{BI}$</p> <p>Suy ra $\triangle CFI \sim \triangle BDI$ suy ra $\widehat{CFI} = \widehat{BDI}$</p> <p>Mà $\widehat{CID} + \widehat{BDI} = 180^\circ$ nên $\widehat{CID} + \widehat{CFI} = 180^\circ$</p> <p>Suy ra ba điểm F, I, D thẳng hàng.</p>	0.5

Câu 5. (3.0 điểm)

$$D = \frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$$

a) Chứng minh rằng biểu thức luôn nhận giá trị nguyên với mọi n là số nguyên chẵn.

b) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4}(a+b+c)$$

5		3.0
	$D = \frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24} = \frac{2n + 3n^2 + n^3}{24}$ <p>a) Ta có</p>	0.25
	<p>Để biểu thức D là số nguyên khi $(n^3 + 3n^2 + 2n) : 24$</p>	0.25
	<p>Ta có $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n^2 + 3n + 2) = n(n+1)(n+2)$</p>	0.25
	<p>suy ra $n(n+1)(n+2) : 3$</p>	0.25
	<p>Vì n là số nguyên chẵn nên $n = 2k \ (k \in \mathbb{Z})$</p> <p>Khi đó $n(n+1)(n+2) = 2k(2k+1)(2k+2) = 4k(k+1)(2k+1)$</p>	0.25

	<p>Vì $k(k+1):2$ nên $4k(k+1):8$ suy ra $n(n+1)(n+2):8$</p>	
	<p>Mà $(3,8)=1$ nên $n(n+1)(n+2):24$</p> <p>Vậy biểu thức $D = \frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ luôn nhận giá trị nguyên với mọi n là số nguyên chẵn.</p>	0.25
	<p>b) Với x, y dương, ta cần chứng minh $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$</p> <p>Ta có $(x-y)^2 \geq 0$</p> <p>$(x+y)^2 \geq 4xy$</p> <p>$\frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y}$</p> <p>$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$</p> <p>Vậy với x, y dương, ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, dấu bằng xảy ra khi $x = y$.</p>	0.5
	<p>Áp dụng bất đẳng thức trên ta được</p> <p>$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \geq \frac{4}{a+b+2c}$ suy ra $\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} \geq \frac{4ab}{a+b+2c}$</p> <p>hay $\frac{ab}{a+b+2c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} \right)$</p>	0.25
	<p>Lập luận tương tự ta có</p> <p>$\frac{bc}{b+c+2a} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{b+a} + \frac{bc}{a+c} \right)$; $\frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ca}{c+b} + \frac{ca}{b+a} \right)$</p>	0.25
	<p>Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta được</p>	0.5

$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b}$ $\leq \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{b+a} + \frac{bc}{a+c} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{ca}{c+b} + \frac{ca}{b+a} \right)$ $= \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{bc}{b+a} + \frac{bc}{a+c} + \frac{ca}{c+b} + \frac{ca}{b+a} \right)$ $= \frac{1}{4} \left(\frac{b(a+c)}{a+c} + \frac{a(b+c)}{b+c} + \frac{c(b+a)}{b+a} \right)$ $= \frac{1}{4} (a+b+c) \quad (\text{đpcm}).$	
---	--

- HẾT -

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÀ RỊA-VŨNG TÀU

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2024 – 2025

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài thi: 150 phút

Ngày thi: 04/3/2025

Câu 1 (3,0 điểm):

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-10}{x-4} + \frac{x+3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-6} - \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x+3\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

b) Tính giá trị của biểu thức $Q = \sqrt{13+4\sqrt{10}} - \sqrt[3]{17\sqrt{2}+11\sqrt{5}}$.

Câu 2 (4,0 điểm):

a) Giải phương trình $\sqrt{4x^2+13x+10} - 2\sqrt{x^2+x+1} = 9x+6$

b) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ (1).

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 - 3m^2 - 16 \leq 0$.

Câu 3 (4,0 điểm):

- a) Tìm tất cả số nguyên tố p và cặp số tự nhiên $(x; y)$ sao cho $\frac{2^{p-2}}{p} = \frac{x^2 + 3}{2y^2 + 3x + 5}$.
- b) Cho hai hộp kín, hộp thứ nhất chứa 8 cái thẻ được đánh số từ 1 đến 8, hộp thứ hai chứa 12 cái thẻ được đánh số từ 1 đến 12. Các thẻ có kích thước như nhau. Chọn ngẫu nhiên từ mỗi hộp một thẻ. Tính xác suất chọn được hai thẻ mà tích của hai số trên thẻ là một số chia hết cho 7.

Câu 4 (5,0 điểm):

- Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$, đường tròn (O) đường kính BC cắt AB tại F , cắt AC tại E . Gọi K là giao điểm của EF và BC , gọi H là giao điểm của BE và CF , đường thẳng AH cắt BC tại D , đường thẳng FD cắt đường tròn (O) tại M ($M \neq F$).
- a) Chứng minh $ABDE$ là tứ giác nội tiếp.
- b) Chứng minh BC là đường phân giác của $\angle EBM$ và $KF \cdot DM = KM \cdot DF$.
- c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt AK tại P ($P \neq A$), cắt ED tại Q ($Q \neq E$). Chứng minh ba điểm P, Q, C thẳng hàng.

Câu 5 (4,0 điểm):

- a) Xét các số thực x, y, z thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 0, z \geq -2$ và $2x + 2y + 2z + 1 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = x + 10xy + 4xyz$.
- b) Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; \dots; 2025\}$. Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho với mọi cách lấy k phần tử bất kỳ thuộc X thì luôn tồn tại hai phần tử a, b ($a > b$) trong k phần tử được lấy mà $a + b$ chia hết cho $a - b$.

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:.....

Chữ ký giám thị số 1:.....

Số báo danh:.....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÀ RỊA – VŨNG TÀU

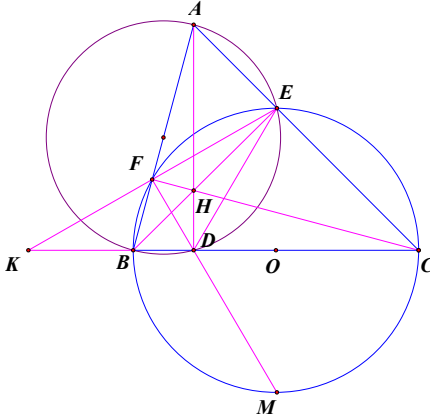
ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2024 – 2025

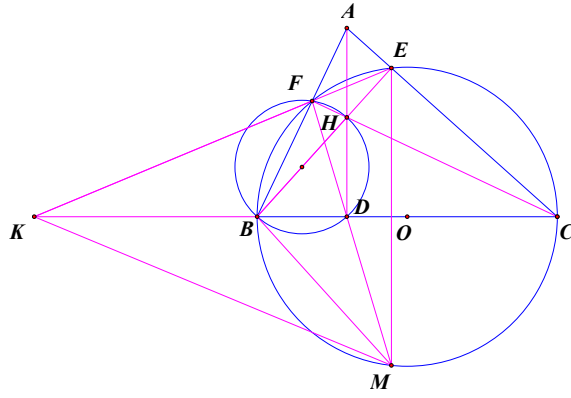
HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN LỚP 9

Câu	Nội dung	Điểm
1.a	Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-10}{x-4} + \frac{x+3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-6} - \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x+3\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.	1,5
	$= \frac{\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} - \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)}$	0,5
	$= \frac{\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ $= \frac{\sqrt{x}-10+\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$	0,5
	$= \frac{4\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{4}{\sqrt{x}+2}$	0,5
1.b	Tính giá trị của biểu thức $Q = \sqrt{13+4\sqrt{10}} - \sqrt[3]{17\sqrt{2}+11\sqrt{5}}$.	1,5
	$\sqrt{13+4\sqrt{10}} = \sqrt{5+4\sqrt{10}+8} = \sqrt{(\sqrt{5}+2\sqrt{2})^2} = \sqrt{5}+2\sqrt{2}$	0,75
	$\sqrt[3]{17\sqrt{2}+11\sqrt{5}} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}+6\sqrt{5}+15\sqrt{2}+5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^3} = \sqrt{2}+\sqrt{5}$	0,5
	$Q = \sqrt{13+4\sqrt{10}} - \sqrt[3]{17\sqrt{2}+11\sqrt{5}} = \sqrt{2}$	0,25
2.a	Giải phương trình $\sqrt{4x^2+13x+10} - 2\sqrt{x^2+x+1} = 9x+6$	2,0
	Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{4x^2+13x+10} \\ v = \sqrt{x^2+x+1} \end{cases}$ điều kiện $u, v \geq 0$	0,25
	Tính được $u^2 - 4v^2 = 9x+6$	0,25
	Đưa PT về dạng $u - 2v = u^2 - 4v^2 \Leftrightarrow (u-2v)(u+2v-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v \\ u + 2v = 1 \end{cases}$	0,5
	Giải PT $u = 2v$ tìm được nghiệm $x = -\frac{2}{3}$	0,5
	Giải PT $u + 2v = 1 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+13x+10} + 2\sqrt{x^2+x+1} = 1$ (1)	0,5

	$2\sqrt{x^2+x+1} = 2\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \sqrt{3}$ <p>Chứng minh suy ra PT (1) vô nghiệm</p>	
2.b	<p>Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ (1).</p> <p>Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 - 3m^2 - 16 \leq 0$.</p>	2,0
	Tính được $\Delta' = 2m - 3$	0,25
	Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$	0,5
	Tính được $x_1 + x_2 = 2(m+1)$	0,25
	$x_1^2 - 2(m+1)x_1 + m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 2(m+1)x_1 - m^2 - 4$	0,25
	$x_1^2 + 2(m+1)x_2 - 3m^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow 2(m+1)x_1 - m^2 - 4 + 2(m+1)x_2 - 3m^2 - 16 \leq 0$ $\Leftrightarrow 2(m+1)(x_1 + x_2) - 4m^2 - 20 \leq 0$	0,25
	$\Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 4m^2 - 20 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$. Kết luận $\frac{3}{2} \leq m \leq 2$	0,5
3.a	<p>Tìm tất cả số nguyên tố p và cặp số tự nhiên $(x; y)$ sao cho $\frac{2^{p-2}}{p} = \frac{x^2+3}{2y^2+3x+5}$.</p>	2,0
	Xét $p = 2$, ta có: $2y^2 + 3x + 5 = 2(x^2 + 3) \Leftrightarrow 2y^2 = 2x^2 - 3x + 1$ (1)	0,25
	<p>x chẵn thì PT (1) VN nên x là số lẻ, đặt $x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$. Suy ra:</p> <p>Nếu $y^2 = 4n^2 + n \Leftrightarrow y^2 = n(4n + 1)$. (2)</p>	0,25
	<p>y^2 là số chính phương và $(n, 4n + 1) = 1$ nên (2) có nghiệm duy nhất</p> <p>Vì $n = 0, y = 0 \Rightarrow x = 1; y = 0$.</p>	0,25
	Xét $p = 3$, ta có: $2(2y^2 + 3x + 5) = 3(x^2 + 3) \Leftrightarrow 4y^2 = 3x^2 - 6x - 1$ (3)	0,25
	Vì $4y^2 \equiv 0 \pmod{3}$ hoặc $4y^2 \equiv 1 \pmod{3}$ mà $3x^2 - 6x - 1 \equiv 2 \pmod{3}$ nên phương trình (3) vô nghiệm.	0,25
	<p>Xét $p \geq 5$ là số nguyên tố lẻ. PT đã cho $\Leftrightarrow 2^{p-2}(2y^2 + 3x + 5) = p(x^2 + 3)$ (4)</p> <p>Nếu x chẵn: $p(x^2 + 3)$ lẻ mà vế trái luôn chẵn nên (4) vô nghiệm.</p>	0,25
	Nếu x lẻ: đặt $x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$ (4) $\Leftrightarrow 2^{p-3}(y^2 + 3n + 4) = p[n(n+1) + 1]$.	0,25

	Về phải luôn lẻ vì $n(n+1)$ chẵn, mà về trái luôn chẵn nên (4) vô nghiệm.	
	Kết luận $p = 2; x = 1; y = 0$	0,25
3.b	Cho hai hộp kín, hộp thứ nhất chứa ^{8} cái thẻ được đánh số từ 1 đến ^{8} và hộp thứ hai chứa ^{12} cái thẻ được đánh số từ 1 đến ^{12}. Các thẻ có kích thước như nhau. Chọn ngẫu nhiên từ mỗi hộp một thẻ. Tính xác suất chọn được hai thẻ mà tích của hai số trên thẻ là một số chia hết cho ^{7}.	2,0
	Hộp thứ nhất có ^{8} cách chọn thẻ và hộp thứ hai có ^{12} cách chọn thẻ nên có tất cả $8 \times 12 = 96$ cách chọn.	0,5
	Tích của hai số chia hết cho ^{7} nên có ít nhất một số chia hết cho ^{7}	0,5
	Tổng số cách chọn thuận lợi là $1 \times 8 + 1 \times 12 - 1 = 19$	0,5
	Vậy xác suất chọn được hai thẻ mà tích của hai số trên thẻ là một số chia hết cho ^{7} là $\frac{19}{96}$.	0,5
4.a	Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$, đường tròn (O) đường kính BC cắt AB tại F, cắt AC tại E. Gọi K là giao điểm của EF và BC, gọi H là giao điểm của BE và CF, đường thẳng AH cắt BC tại D, đường thẳng FD cắt đường tròn (O) tại $M (M \neq F)$. a) Chứng minh $ABDE$ là tứ giác nội tiếp.	2,0
		
	Ta có $\angle BEC = 90^\circ \Rightarrow BE \perp AC$; $\angle BFC = 90^\circ \Rightarrow CF \perp AB$ do đó H là trực tâm tam giác ABC suy ra $AH \perp BC$.	1,0
	Xét tứ giác $ABDE$ có $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$ suy ra tứ giác $ABDE$ nội tiếp.	1,0
4.b	b) Chứng minh BC là đường phân giác của $\angle EBM$ và $KF \cdot DM = KM \cdot DF$.	1,5



Tứ giác $BDHF$ có $\angle BDH = \angle BFH = 90^\circ$ suy ra tứ giác $BDHF$ nội tiếp.

0,5

Do đó $\angle CFM = \angle EBC$ (cùng chắn cung HD)

0,25

Mà $\angle CFM = \angle CBM$ do vậy $\angle EBC = \angle CBM$ suy ra BC là đường phân giác của $\angle EBM$.

0,25

Từ đây có $\angle EC = \angle MC$ suy ra $\angle EB = \angle MB$ do đó $\begin{cases} CE = CM \\ BE = BM \end{cases}$ suy ra BC là đường thẳng trung trực của EM suy ra $\triangle KEM$ cân tại K , do đó KD là phân giác của $\angle FKM$

0,25

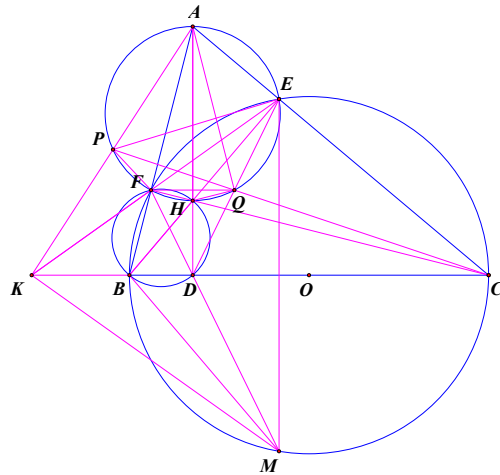
Trong tam giác FKM có $\frac{DF}{DM} = \frac{KF}{KM}$ hay $KF \cdot DM = KM \cdot DF$.

0,25

4.c

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt AK tại $P(P \neq A)$, cắt ED tại $Q(Q \neq E)$. Chứng minh ba điểm P, Q, C thẳng hàng.

1,5



$\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$ suy ra tứ giác $AEHF$ nội tiếp, $DHEC$ là tứ giác nội tiếp nên $\angle FCB = \angle HED$ (cùng chắn cung HD), mặt khác $\angle FCB = \angle FEB$ (cùng chắn cung FB) do đó $\angle HED = \angle FEB$ suy ra $\angle FH = \angle HQ$ do vậy $\angle AF = \angle AQ$ suy ra $\triangle AFQ$ cân tại A suy ra $AH \perp FQ$, do vậy $FQ \parallel BC$.

0,5

Ta có $\angle APF = \angle FEC = \angle FBK$ suy ra $PFBK$ là tứ giác nội tiếp.

0,25

	Chứng minh được $PKCE$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	Ta có $\widehat{EKC} = \widehat{EPC}$ (cùng chắn $\widehat{EC}$), mà $\widehat{EKC} = \widehat{EFQ}$ (đồng vị) suy ra $\widehat{EFQ} = \widehat{EPC}$.	0,25
	Mặt khác $\widehat{EFQ} = \widehat{EPQ}$ (cùng chắn cung $\widehat{EQ}$) do đó $\widehat{EPC} = \widehat{EPQ}$ hay ba điểm P, Q, C thẳng hàng.	0,25
5.a	Xét các số thực x, y, z thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 0, z \geq -2$ và $2x + 2y + 2z + 1 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = x + 10xy + 4xyz$.	2,0
	Đặt $\begin{cases} a = 2x \\ b = 2y \\ c = 2z + 4 \end{cases}$ ta có được $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ (*).	0,25
	$2T = 2x + 20xy + 8xyz = a + 5ab + ab(c - 4) = a + ab + abc$	0,5
	Đánh giá $ab + abc = ab(1 + c) \leq \frac{a}{4}(b + 1 + c)^2 = \frac{a}{4}(a - 4)^2$	0,25
	Suy ra $2T \leq a + \frac{a}{4}(a - 4)^2$ hay $2T \leq a - 4 + \frac{a}{4}(a - 4)^2 + 4 = \frac{1}{4}(a - 4)(a - 2)^2 + 4$	0,25
	Nhận xét từ (*) suy ra $a - 4 < 0$ do đó $2T \leq 4 \Leftrightarrow T \leq 2$	0,25
	Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a = 2 \\ b = 1 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -2 \end{cases}$. Vậy $T_{\max} = 2$ khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -2 \end{cases}$.	0,5
5.b	Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; \dots; 2025\}$. Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho với mọi cách lấy k phần tử bất kỳ thuộc X thì luôn tồn tại hai phần tử a, b ($a > b$) trong k phần tử được lấy mà $a + b$ chia hết cho $a - b$.	2,0
	Xét tập $A = \{1; 4; 7; \dots; 2023\}$ có 675 phần tử mà mọi cặp số $x, y \in A$ đều có $x + y$ không phải là bội của 3, nhưng $x - y$ là bội của 3 do đó $x + y$ không chia hết cho $x - y$. Suy ra $k > 675$.	0,5
	Xét mỗi cách lấy ra 676 phần tử bất kỳ của tập X , giả sử ta xếp được trật tự $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{676}$, lúc đó $a_{676} - a_1 \leq 2025 - 1 = 2024$	0,25
	Ta biểu diễn $a_{676} - a_1 = (a_{676} - a_{675}) + (a_{675} - a_{674}) + \dots + (a_2 - a_1)$ về phải có 675 số hạng và $675 \times 3 = 2025 > 2024$ suy ra có một số hạng $a_{i+1} - a_i < 3$ với $i = \overline{1; 675}$	0,25
	Giả sử 2 phần tử đó là a, b ($a > b$) khi đó $a - b = 1$ hoặc $a - b = 2$	0,25

Nếu $a - b = 1$ hiển nhiên $(a + b) : (a - b)$	0,25
Nếu $a - b = 2$ thì a, b là hai số cùng tính chẵn lẻ nên $(a + b) : 2$	0,25
Kết luận số k nhỏ nhất là 676 .	0,25

* **Ghi chú:** Nếu học sinh làm cách khác đúng, giám khảo căn cứ vào điểm của từng phần để chấm cho phù hợp.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH PHÚ YÊN**

Ngày thi: 05/03/2025

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
TRUNG HỌC CƠ SỞ CẤP TỈNH**

NĂM HỌC 2024 – 2025

Câu 1: (4.00 điểm) Cho biểu thức: $A = \frac{x-1}{x+2\sqrt{x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$

- Tìm điều kiện xác định của A
- Chứng minh rằng: $A = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}}$
- Với giá trị nguyên nào của x thì A có giá trị nguyên.

Câu 2: (3.00 điểm) Cho $\begin{cases} a = x + \frac{1}{x} \\ b = y + \frac{1}{y} \\ c = xy + \frac{1}{xy} \end{cases}$ và biểu thức $B = a^2 + b^2 + c^2 - abc$

Chứng minh rằng với mọi giá trị của x, y thì biểu thức B không phụ thuộc vào biến x, y .

Câu 3: (4.00 điểm) Giải phương trình sau: $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = \frac{5}{4}$

Câu 4: (4.00 điểm)

- Cho đường tròn tâm (O) và hai dây cung MN, PQ cắt nhau tại I với cung QN không chứa điểm P và cung MP không chứa điểm Q . Chứng minh rằng:
 $\widehat{NIQ} = \frac{1}{2} \text{sd}(\widehat{QN} + \widehat{MP})$.
- Chứng minh rằng một tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° là tứ giác nội tiếp.
- Trên đường tròn tâm (O) lấy ba điểm A, B, C sao cho $\widehat{AB} = \widehat{BC}$. Dựng hai dây cung BD và BE , chúng cắt dây AC lần lượt tại hai điểm M và N . Chứng minh rằng.
 - Tứ giác $EDMN$ là tứ giác nội tiếp
 - Nếu $AN = CM$ thì tứ giác $EDMN$ là hình gì? Vì sao?

Câu 5: (3.00 điểm) Cho hai đường tròn $(O_1; R)$ và $(O_2; r)$ tiếp xúc ngoài tại I ($R > r$). Một đường thẳng d không đi qua I đồng thời tiếp xúc với $(O_1; R)$ và $(O_2; r)$ lần lượt tại hai điểm A, B . Gọi H là chân đường cao kẻ từ O_2 đến cạnh O_1A . Gọi M là trung điểm của AH , đường thẳng qua M vuông góc với AH cắt đường tròn $(O_1; R)$ tại điểm K (K khác phía I so với AH).

Chứng minh rằng:

a) $AK = \sqrt{Rr}$.

b) Đường thẳng KH tiếp xúc với $(O_2; r)$.

Câu 6: (2.00 điểm) Cho hai số $x \geq 0, y \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{(x-2y)(1-2xy)}{(x+1)^2(1+2y)^2} \leq \frac{1}{4}$

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH PHÚ YÊN NĂM HỌC 2024 – 2025 (ĐÁP ÁN THAM KHẢO)

Câu 1: (4.00 điểm) Cho biểu thức: $A = \frac{x-1}{x+2\sqrt{x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$

a) Tìm điều kiện xác định của A

b) Chứng minh rằng: $A = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}}$

c) Với giá trị nguyên nào của x thì A có giá trị nguyên.

Bài giải:

a) Để biểu thức A xác định thì: $\begin{cases} x+2\sqrt{x+1}+1 \neq 0 \\ \sqrt{x+1}-1 \neq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$

Với $x+2\sqrt{x+1}+1 \neq 0$ thì ta có:

$$x+2\sqrt{x+1}+1 = \sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+2) \neq 0$$

Suy ra: $\sqrt{x+1} \neq 0$ hoặc $\sqrt{x+1}+2 \neq 0$ (luôn đúng)

Do đó: $\sqrt{x+1} \neq 0$, suy ra $x \neq -1$

Với $\sqrt{x+1}-1 \neq 0$ thì ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &\neq 1 \\ x+1 &\neq 1 \\ x &\neq 0 \end{aligned}$$

Với $x+1 \geq 0$ thì ta có:

$$x \geq -1$$

Vậy để biểu thức A xác định thì: $x > -1$ và $x \neq 0$

b) $A = \frac{x-1}{x+2\sqrt{x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$

$$A = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+2)} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$$

$$A = \frac{x-1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+2)} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$$

Đặt $a = \sqrt{x+1}$, khi đó biểu thức trở thành:

$$A = \frac{a^2 - 2 + a}{a(a+2)} \times \frac{a+1}{a-1} = \frac{(a^2 - 2 + a)(a+1)}{a(a-1)(a+2)}$$

Ta có: $a^2 + a - 2 = a^2 - a + 2a - 2 = a(a-1) + 2(a-1) = (a-1)(a+2)$

Khi đó biểu thức trở thành:

$$A = \frac{(a-1)(a+1)(a+2)}{a(a-1)(a+2)} = \frac{a+1}{a} = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}} \text{ (đpcm)}$$

c) Ta có $A = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

Để A có giá trị nguyên thì $1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ sẽ có giá trị nguyên, mà 1 đã là số nguyên nên

do đó $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ cũng sẽ là số nguyên hay 1 chia hết cho $\sqrt{x+1}$.

Điều này tương đương với $\sqrt{x+1}$ thuộc ước của 1.

Hay $\sqrt{x+1} \in \{\pm 1\}$ mà $\sqrt{x+1} > 0$ nên $\sqrt{x+1} = 1$, suy ra: $x+1=1$ hay $x=0$.

Nhưng để A xác định thì x phải thỏa mãn $x > -1$ và $x \neq 0$.

Do đó không có giá trị nguyên nào của x thỏa mãn để A là số nguyên.

Câu 2: (3.00 điểm) Cho
$$\begin{cases} a = x + \frac{1}{x} \\ b = y + \frac{1}{y} \\ c = xy + \frac{1}{xy} \end{cases}$$
 và biểu thức $B = a^2 + b^2 + c^2 - abc$

Chứng minh rằng với mọi giá trị của x, y thì biểu thức B không phụ thuộc vào biến x, y .

Bài giải:

Ta có: $a = x + \frac{1}{x}$, suy ra $a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x \cdot \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

$b = y + \frac{1}{y}$, suy ra $b^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2y \cdot \frac{1}{y} = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$

$c = xy + \frac{1}{xy}$, suy ra $c^2 = xy^2 + \frac{1}{(xy)^2} + 2xy \cdot \frac{1}{(xy)} = (xy)^2 + \frac{1}{(xy)^2} + 2$

$$abc = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(y + \frac{1}{y}\right) \left(xy + \frac{1}{xy}\right) = \left(xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \left(xy + \frac{1}{xy}\right)$$

$$= (xy)^2 + \frac{1}{(xy)^2} + 2$$

Do đó:

$B = a^2 + b^2 + c^2 - abc$

$B = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + y^2 + \frac{1}{y^2} + 2 + (xy)^2 + \frac{1}{(xy)^2} + 2 - (xy)^2 - \frac{1}{(xy)^2} - 2$

$B = 4$

Vậy với mọi giá trị của x, y thì biểu thức B không phụ thuộc vào biến x, y .

Câu 3: (4.00 điểm) Giải phương trình sau: $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = \frac{5}{4}$

Thực hiện quy đồng về trái ta có:

$$x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = \frac{x^2(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2(x^2-2x+1)+x^2}{(x^2-2x+1)} = \frac{x^4-2x^3+2x^2}{x^2-2x+1}$$

Khi đó phương trình trở thành: $\frac{x^4-2x^3+x^2}{x^2-2x+1} = \frac{5}{4}$

Điều đó tương đương:

$$\begin{aligned} 4(x^4-2x^3+2x^2) &= 5(x^2-2x+1) \\ 4x^4-8x^3+8x^2 &= 5x^2-10x+5 \\ 4x^4-8x^3+3x^2+10x-5 &= 0 \\ 4x^4+4x^3-12x^3-12x^2+15x^2+15x-5x-5 &= 0 \\ 4x^3(x+1)-12x^2(x+1)+15x(x+1)-5(x+1) &= 0 \\ (x+1)(4x^3-12x^2+15x-5) &= 0 \\ (x+1)(4x^3-2x^2-10x^2+5x+10x-5) &= 0 \\ (x+1) & \\ (x+1)(2x-1)(2x^2-5x+5) &= 0 \end{aligned}$$

Suy ra: $x+1=0$ hoặc $2x-1=0$ hoặc $2x^2-5x+5=0$

Với $x+1=0$ thì $x=-1$ (TM)

Với $2x-1=0$ thì $x=\frac{1}{2}$ (TM)

Với $2x^2-5x+5=0$

Xét $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 25 - 40 = -15 < 0$

Do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-1, x=\frac{1}{2}$.

Câu 4: (4.00 điểm)

1. Cho đường tròn tâm (O) và hai dây cung MN, PQ cắt nhau tại I với cung QN không chứa điểm P và cung MP không chứa điểm Q . Chứng minh rằng:

$$\widehat{NIQ} = \frac{1}{2} \text{sd}(\widehat{QN} + \widehat{MP}).$$

2. Chứng minh rằng một tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° là tứ giác nội tiếp.
3. Trên đường tròn tâm (O) lấy ba điểm A, B, C sao cho $\widehat{AB} = \widehat{BC}$. Dựng hai dây cung BD và BE , chúng cắt dây AC lần lượt tại hai điểm M và N . Chứng minh rằng:
 - a) Tứ giác $EDMN$ là tứ giác nội tiếp
 - b) Nếu $AN = CM$ thì tứ giác $EDMN$ là hình gì? Vì sao?

Bài giải:

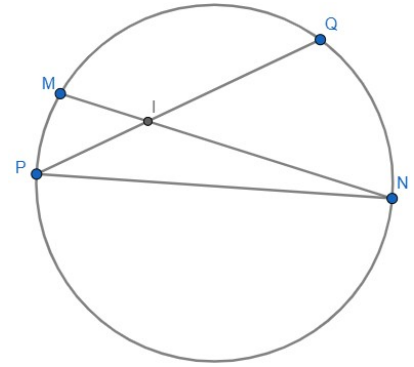
1. Ta có $\widehat{NIQ}$ là góc ngoài của tam giác NIP , do đó:

$$\widehat{NIQ} = \widehat{IPN} + \widehat{INP}$$

Mà: $\widehat{IPN} = \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{NQ}$ (chắn cung QN),

$\widehat{INP} = \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{MP}$ (chắn cung MP),

Do đó: $\widehat{NIQ} = \frac{1}{2} \text{sd}(\widehat{QN} + \widehat{MP})$.



2.

Cách 1: Dựng đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABD .

Giả sử đường tròn (O) cắt OC tại C' .

Ta có tứ giác $ABC'D$ nội tiếp đường tròn tâm O

Suy ra: $\widehat{BAD} + \widehat{BC'D} = 180^\circ$

Mà $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ (đ)

Suy ra: $\widehat{BCD} = \widehat{BC'D}$

Mà B, D cố định, nên C' thuộc OC

Từ đó suy ra $C \equiv C'$

Suy ra C thuộc đường tròn tâm O .

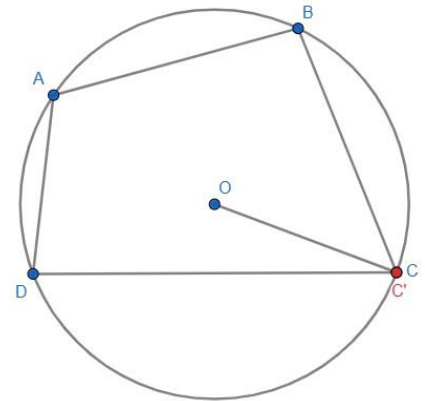
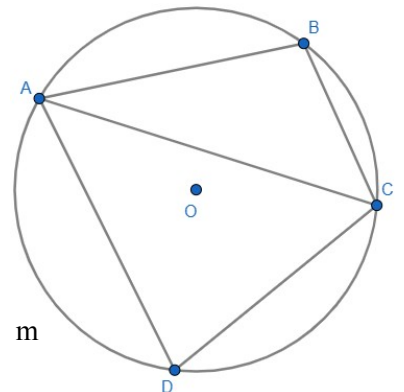
Vậy $ABCD$ nội tiếp.

Cách 2: Giả sử tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$.

Ta vẽ đường tròn tâm O qua A, B, C (bao giờ cũng vẽ được đường tròn như thế này vì A, B, C không thẳng hàng). Hai điểm A và C chia đường tròn (O) thành hai cung ABC và AmC , trung đó $\widehat{AmC}$ là cung chứa góc $(180^\circ - \widehat{B})$ dựng trên đoạn thẳng AC .

Mặt khác, từ giả thiết suy ra $\widehat{D} = 180^\circ - \widehat{B}$.

Vậy điểm D nằm trên $\widehat{AmC}$ nói trên. Tức là tứ giác $ABCD$ có bốn đỉnh nằm trên đường tròn (O) .



3.

a) Tứ giác EDMN là tứ giác nội tiếp

Ta có $\widehat{BMC}$ là góc ngoài của tam giác AMB , do đó:

$$\widehat{BMC} = \widehat{MBA} + \widehat{MAB}$$

Mà: $\widehat{MBA} = \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{AD}$ (chắn cung AD),

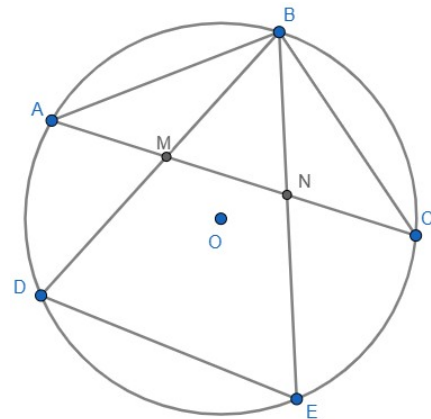
$$\widehat{BAM} = \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{BC} \text{ (chắn cung } BC) = \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{AB} \text{ (sd } \widehat{AB} = \text{sd}\widehat{BC}) ,$$

Do đó: $\widehat{BMC} = \frac{1}{2} \text{sd}(\widehat{AB} + \widehat{AD}) = \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{DB}$.

Mà: $\widehat{BED} = \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{BD}$ (chắn cung BD)

Suy ra: $\widehat{BED} = \widehat{BMC}$, mà $\widehat{BMC} + \widehat{DMN} = 180^\circ$

Suy ra: $\widehat{BED} + \widehat{DMN} = 180^\circ$



Mà tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° là tứ giác nội tiếp.

Do đó Tứ giác $EDMN$ là nội tiếp.

b) Nếu $AN = CM$ thì tứ giác $EDMN$ là hình gì? Vì sao?

Ta có: $\widehat{AOB} = sđ\widehat{AB}$ (góc ở tâm chắn cung AB),

$\widehat{COB} = sđ\widehat{CB}$ (góc ở tâm chắn cung CB)

Mà: $sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{BC}$

Suy ra: $\widehat{AOB} = \widehat{COB}$

Kết hợp: $OA = OC$,

OB là cạnh chung

Suy ra: $\triangle AOB = \triangle COB$ (c.g.c),

Suy ra: $AB = BC$ (1)

Suy ra: $\triangle ABC$ cân tại A .

Suy ra: $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$ (2)

Từ (1) và (2) kết hợp $AN = CM$

Suy ra: $\triangle ANB = \triangle CMB$ (c.g.c)

Suy ra: $\widehat{ABN} = \widehat{CBM}$

Mà: $\widehat{ABN} = \widehat{ABM} + \widehat{NBM}$

$\widehat{CBM} = \widehat{CBE} + \widehat{NBM}$

Suy ra: $\widehat{ABM} = \widehat{CBE}$

Mà: $\widehat{DBA} = \frac{1}{2} sđ\widehat{AD}$ (chắn cung AD),

$\widehat{CBE} = \frac{1}{2} sđ\widehat{EC}$ (chắn cung EC)

Suy ra: $sđ\widehat{AD} = sđ\widehat{EC}$.

Ta có: $\triangle ANB = \triangle CMB$ (c.g.c),

Suy ra: $MB = BN$

Suy ra: $\triangle MBN$ cân tại N .

Suy ra: $\widehat{BMN} = \frac{180^\circ - \widehat{MBN}}{2}$.

Ta có: $180^\circ - \widehat{MBN} = \frac{1}{2} (360^\circ - 2\widehat{MBN})$

$= \frac{1}{2} (360^\circ - 2 \cdot \frac{1}{2} sđ\widehat{DE}) = \frac{1}{2} (360^\circ - sđ\widehat{DE})$

$= \frac{1}{2} (sđ\widehat{DE} \text{ lớn}) = \frac{1}{2} (2sđ\widehat{BE}) = sđ\widehat{BE}$

Suy ra: $\widehat{BMN} = \frac{180^\circ - \widehat{MBN}}{2} = \frac{sđ\widehat{BE}}{2} = \frac{1}{2} sđ\widehat{BE}$

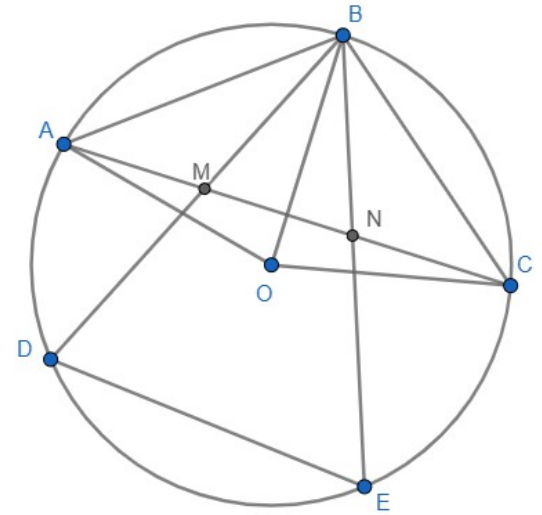
Mà $\widehat{BDE} = \frac{1}{2} sđ\widehat{BE}$ (chắn cung BE).

Suy ra: $\widehat{BMN} = \widehat{BDE}$

Mà hai góc ở vị trí đồng vị.

Do đó: $MN \parallel DE$.

Suy ra: $EDMN$ là hình thang.



Ta có: $\widehat{MDE} + \widehat{DMN} = 180^\circ$ (2 góc trong cùng phía thì bù nhau)

Mà: $\widehat{BED} + \widehat{DMN} = 180^\circ$ (cmt)

Suy ra: $\widehat{MDE} = \widehat{BED}$.

Suy ra: $EDMN$ là hình thang cân.

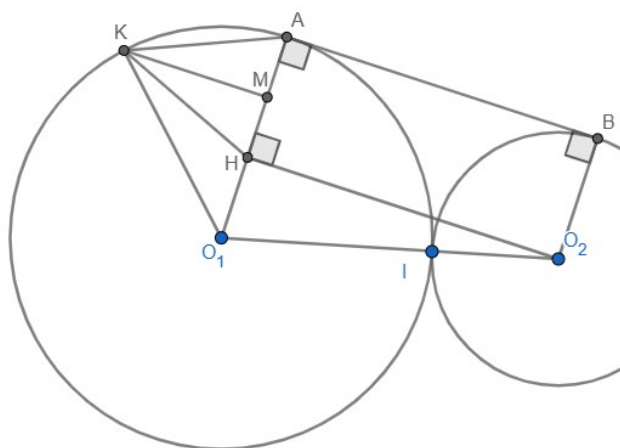
Câu 5: (3.00 điểm) Cho hai đường tròn $(O_1; R)$ và $(O_2; r)$ tiếp xúc ngoài tại I ($R > r$). Một đường thẳng d không đi qua I đồng thời tiếp xúc với $(O_1; R)$ và $(O_2; r)$ lần lượt tại hai điểm A, B . Gọi H là chân đường cao kẻ từ O_2 đến cạnh O_1A . Gọi M là trung điểm của AH , đường thẳng qua M vuông góc với AH cắt đường tròn $(O_1; R)$ tại điểm K (K khác phía I so với AH).

Chứng minh rằng:

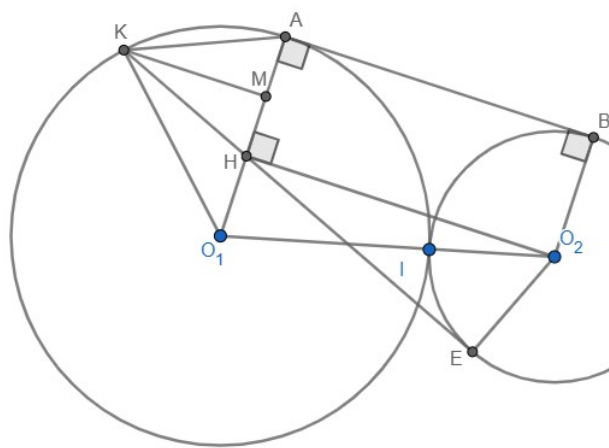
a) $AK = \sqrt{Rr}$.

b) Đường thẳng KH tiếp xúc với $(O_2; r)$.

Bài giải:



Hình 1



Hình 2

a) $AK = \sqrt{Rr}$.

Ta có: $O_1A = O_1K (= R)$

Suy ra: Tam giác O_1AK cân tại O_1 .

Suy ra: $\widehat{KO_1A} = \frac{180^\circ - \widehat{O_1AK}}{2}$ (1).

Xét tam giác AKH có KM vừa là đường cao, đường trung tuyến.

Do đó: tam giác AKH cân tại K .

Suy ra: $\widehat{AKH} = \frac{180^\circ - \widehat{O_1AK}}{2}$ (2).

Từ (1) và (2), ta suy ra: $\widehat{KO_1A} = \widehat{AKH}$.

Kết hợp: $\widehat{O_1AK}$ là góc chung.

Do đó: $\triangle AKH \sim \triangle AO_1K$ (g.g).

Suy ra: $\frac{AK}{AH} = \frac{AO_1}{AK}$.

Suy ra: $AK^2 = AH \cdot AO_1$.

Ta có: AB tiếp xúc với $(O_1; R)$ và $(O_2; r)$

Do đó: $\widehat{HAB} = \widehat{AHO_2} = \widehat{ABO_2} = 90^\circ$.

Suy ra: tứ giác AHO_2B là hình chữ nhật.

Suy ra: $AH = BO_2 = r$.

Do đó: $AK^2 = AH \cdot AO_1 = Rr$.

Suy ra: $AK = \sqrt{Rr}$.

b) Đường thẳng KH tiếp xúc với $(O_2; r)$.

Kẻ OE vuông góc KH , khi đó ta chỉ cần chứng minh E thuộc $(O_2; r)$ hay $OE = r$.

Ta có: $MK \parallel O_2H$ (cũng vuông góc với O_1A).

Khi đó: $\widehat{MKH} = \widehat{O_2HE}$ (2 góc ở vị trí đồng vị).

Kết hợp $\widehat{KMH} = \widehat{HEO_2} = 90^\circ$.

Suy ra: $\triangle MKH \sim \triangle EHO_2 (g.g)$

Suy ra: $\frac{MH}{EO_2} = \frac{HK}{O_2H} \cdot (*)$

Ta có: $AK = HK$ (tam giác KHA cân tại K).

Mà $AK = \sqrt{Rr}$, suy ra: $HK = AK = \sqrt{Rr}$.

Ta có: $O_1H = O_1A - AH = R - r$.

$O_1O_2 = O_1I + O_2I = R + r$.

Ta có: tam giác O_1HO_2 vuông tại H , theo định lý Pythagore ta có:

$$O_1O_2^2 = O_1H^2 + O_2H^2$$

Suy ra:

$$O_2H^2 = O_1O_2^2 - O_1H^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2$$

$$O_2H^2 = (R + r + R - r)(R + r - R + r)$$

$$O_2H^2 = 4Rr$$

$$O_2H = 2\sqrt{Rr},$$

$$\text{Từ } (*), \text{ ta suy ra: } EO_2 = \frac{MH \cdot O_2H}{HK} = \frac{\frac{r}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{Rr}}{\sqrt{Rr}} = r$$

Từ đó, ta sẽ suy ra E thuộc $(O_2; r)$

Mà KH lại vuông góc OE .

Do đó: KH tiếp xúc với $(O_2; r)$.

Câu 6: (2.00 điểm) Cho hai số $x \geq 0, y \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{(x-2y)(1-2xy)}{(x+1)^2(1+2y)^2} \leq \frac{1}{4}$

Bài giải:

Ta có: $x - 2y = x + 1 - 1 - 2y = (x + 1) - (1 + 2y)$

$$1 - 2xy = 1 + x - x - 2xy = (x + 1) - x(1 + 2y)$$

Đặt $a = x + 1, b = 1 + 2y$, khi đó:

Ta có: $x - 2y = (x + 1) - (1 + 2y) = a - b$

$$1 - 2xy = (x + 1) - x(1 + 2y) = a - (a - 1)b = a - ab + b$$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } & \frac{(x-2y)(1-2xy)}{(x+1)^2(1+2y)^2} \\
&= \frac{(a-b)(a-ab+b)}{(ab)^2} \\
&= \frac{a-b}{ab} \cdot \frac{a-ab+b}{ab} \\
&= \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{b} - 1 + \frac{1}{a}\right) \\
&= \frac{1}{b^2} - \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \\
&= \frac{1}{b^2} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \\
&= \frac{1-b}{b^2} + \frac{a-1}{a^2} \\
&= \frac{1-1-2y}{(1+2y)^2} + \frac{x+1-1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{-2y}{(1+2y)^2} + \frac{x}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

Ta có: $y \geq 0$, suy ra: $2y \geq 0$

Do đó: $-2y \leq 0$

Ta có: $(1+2y)^2 \geq 0$, mà $(1+2y)^2$ ở dưới mẫu nên $(1+2y)^2 \neq 0$.

$$\text{Suy ra: } \frac{-2y}{(1+2y)^2} \leq 0 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } x \cdot 1 \leq \frac{(x+1)^2}{4}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{x}{(x+1)^2} \leq \frac{(x+1)^2}{4(x+1)^2} \leq \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta suy ra: } \frac{-2y}{(1+2y)^2} + \frac{x}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Hay } \frac{(x-2y)(1-2xy)}{(x+1)^2(1+2y)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

PHÚ THỌ

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH

NĂM HỌC 2024 - 2025

Môn: TOÁN - LỚP 9 THCS

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

(Đề thi có 03 trang)

Lưu ý: Thí sinh làm bài (cả phần tự luận và trắc nghiệm) vào tờ giấy thi.

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (4,0 điểm). Thí sinh trả lời câu hỏi từ 1 đến 16. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời A, B, C, D trong đó chỉ có 1 phương án đúng.

Câu 1: Số các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = (m-2)x + \sqrt{5-m}$ là hàm số bậc nhất bằng

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biết đường thẳng $(d): -2x + y = 2$ cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B . Diện tích tam giác OAB bằng

- A. 2. B. 1. C. -2. D. -1.

Câu 3: Nhà cô An vừa thu hoạch vườn bưởi được 2380 quả. Cô phân làm hai loại bưởi và bán với giá 20000 đồng một quả bưởi loại I, 15000 đồng một quả bưởi loại II. Sau khi bán hết toàn bộ số bưởi đã thu hoạch, cô tính ra còn thiếu 400000 đồng nữa thì được tròn 40 triệu đồng. Hiệu số giữa số quả bưởi loại II và số quả bưởi loại I bằng

- A. 800 quả. B. -800 quả. C. 820 quả. D. -820 quả.

Câu 4: Biết $\frac{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{a}-b, (a, b \in \mathbb{Q})$. Tổng $a+b$ bằng

- A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 5: Biết $P = \sqrt[3]{-8x^3 + 12x^2 - 6x + 1}$. Tích các nghiệm của phương trình $x^2 + P - 4 = 0$ bằng

- A. -2. B. 2. C. -3. D. 3.

Câu 6: Điều kiện của tham số m để đồ thị hàm số $y = (1-m)x^2$ nằm phía dưới trục hoành là

- A. $m > 1$. B. $m \geq 1$. C. $m < 1$. D. $m \leq 1$.

Câu 7: Phương trình $mx^2 - 2mx + m + 1 = 0$ có nghiệm khi

- A. $m < 0$. B. $m \leq 0$. C. $m \neq 0$. D. $m > 0$.

Câu 8: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 3$. Gọi A, B là các giao điểm của (P) và (d) . Điểm $C(a, b)$ thuộc trục hoành sao cho $CA + CB$ có giá trị nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

- A. $-\frac{3}{2}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $-\frac{3}{5}$. D. $-\frac{5}{3}$.

Câu 9: Một tổ có 6 nam và 4 nữ, chọn ngẫu nhiên 3 người. Xác suất chọn được 3 người đều là nam bằng

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{30}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 10: Một lô hàng gồm 2000 sản phẩm trong đó có 60 phế phẩm, còn lại là sản phẩm tốt. Lấy ngẫu nhiên từ lô hàng đó 1 sản phẩm. Xác suất để lấy được sản phẩm tốt là

- A. 0,94. B. 0,95. C. 0,96. D. 0,97.

Câu 11: Cho hình bình hành $ABCD$ ($AB < BC$), một đường thẳng d đi qua điểm A và cắt các đường thẳng BD, BC, CD lần lượt tại M, N, P . Biết độ dài $MA = 2\sqrt{2}$, khi đó tích $MN \cdot MP$ bằng

- A. 7. B. 8. C. 9. D. 10.

Câu 12: Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BD và AC . Biết rằng $MB = 3OM$, đáy lớn $CD = 4,8$. Độ dài $AB + MN$ bằng

- A. 2,4. B. 3,4. C. 3,5. D. 3,6.

Câu 13: Người ta làm một chiếc hòm bằng tôn có dạng hình hộp chữ nhật thể tích là $\frac{8}{3} \text{ m}^3$ có cả nắp. Biết đáy hòm có chiều dài bằng hai lần chiều rộng. Để tốn ít vật liệu nhất (coi mỗi ghép và độ dày tấm tôn không đáng kể) thì chiều dài mặt đáy của chiếc hòm có độ dài bằng

- A. 0,5 m. B. 1 m. C. 1,5 m. D. 2 m.

Câu 14: Một cái cột điện cao 10 m (chiều cao tính từ mặt đất đến đỉnh cột) bị gió bão làm gãy ngang thân cột. Ba điểm: chân cột, điểm gãy, đỉnh cột tạo thành một tam giác vuông. Đỉnh cột chạm đất và cách chân cột 4 m . Khoảng cách từ chân cột đến điểm gãy có độ dài bằng

- A. 4,2 m. B. 5,2 m. C. 4,8 m. D. 6 m.

Câu 15: Cho đường tròn $(O; 3)$, M là điểm nằm ngoài đường tròn. Qua M kẻ đường thẳng không đi qua tâm O , cắt đường tròn $(O; 3)$ tại hai điểm phân biệt C, D (C nằm giữa M và D). Đoạn thẳng MO cắt $(O; 3)$ tại I . Biết $MC \cdot MD = 18$. Độ dài MI bằng

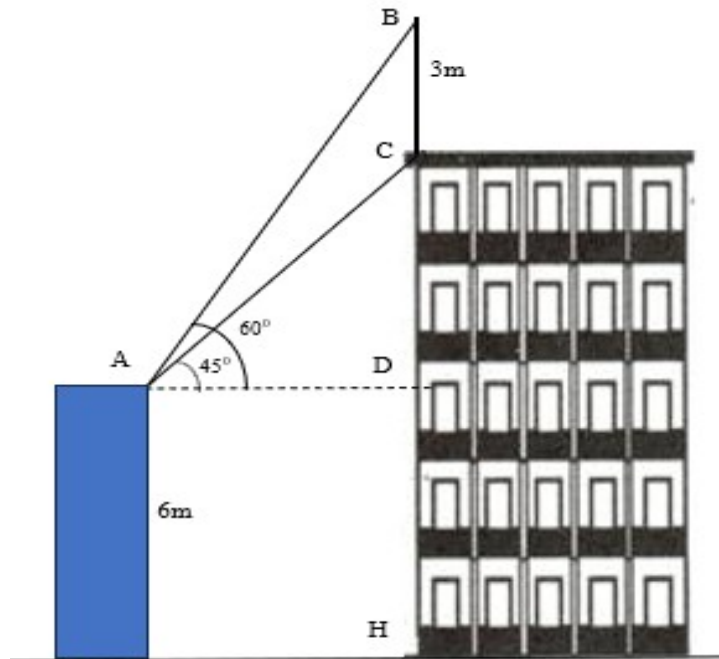
- A. $3(\sqrt{2} - 1)$. B. $3(\sqrt{3} - 1)$. C. $3\sqrt{3}$.
D. $6\sqrt{3}$.

Câu 16: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm I nằm trong đường tròn, hai dây cung AB, CD thay đổi và vuông góc với nhau tại I , khi đó giá trị $\sqrt{IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2}$ là

- A. $2R^2$. B. $R\sqrt{3}$. C. $4R^2$. D. $2R$.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai (2,0 điểm). Thí sinh trả lời Câu 17; Câu 18. Trong mỗi ý a). b). c). d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17: Trên nóc một tòa nhà có cột thu sét cao 3 m . Từ vị trí quan sát A cao 6 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột thu sét dưới góc 60° và 45° so với phương nằm ngang (như hình vẽ bên).



- a) $BD = AD \cdot \cot(60^\circ)$.
- b) $CD = AD \cdot \tan(45^\circ)$.
- c) Chiều cao CH của toà nhà có giá trị bằng $10,1\text{m}$ (làm tròn đến hàng phần mười).
- d) Khoảng cách từ vị trí quan sát A đến chân C của cột thu sét có giá trị bằng $5,7\text{m}$ (làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 18: Trong một hộp đựng 18 quả cầu kích thước khác nhau gồm có ba màu xanh, đỏ, vàng. Số quả cầu màu xanh bằng $\frac{3}{2}$ lần số quả cầu màu đỏ và số quả cầu màu đỏ bằng $\frac{1}{2}$ lần số quả cầu màu vàng.

- a) Số cách để lấy được 2 quả cầu từ hộp là 153 .
- b) Chọn ngẫu nhiên 1 quả cầu trong hộp. Xác suất để chọn được quả cầu màu vàng là $\frac{2}{9}$.
- c) Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu trong hộp. Xác suất để 2 quả cầu được chọn không có quả nào màu xanh là $\frac{22}{51}$.
- d) Thêm vào hộp một số quả cầu màu xanh, màu đỏ và màu vàng sao cho xác suất chọn được một quả cầu mỗi màu không đổi. Khi đó cần thêm ít nhất 6 quả cầu màu xanh, 4 quả cầu màu đỏ và 8 quả cầu màu vàng.

Phần III. Tự luận (14,0 điểm)

Câu 1 (4,0 điểm).

- a) Chứng minh rằng $a^3 - 1501a$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên a .
- b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn $x^3 - y^3 + y^2 + y = 2$.
- c) Tìm các số nguyên tố x, y, z thoả mãn $x^2 y^2 + x^2 + y^2 = z^2$.

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Cho đa thức $f(x) = x^2 + ax + b - 1$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $0 < a < 1; a, b \in \mathbb{Q}$. Tìm số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = x$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^3 - 3x^2 + 2x + y + x^2y - 3 = 0 \\ 4x^2 + xy - 9x - 1 = \sqrt{2x - y + 8} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Q}).$$

Câu 3 (4,0 điểm). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn

(A, B là tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OM và AB , đường thẳng đi qua M cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt C, D (C nằm giữa M và D), N là trung điểm của CD , AN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E (E khác A).

a) Chứng minh rằng 4 điểm A, B, O, N cùng nằm trên một đường tròn và tứ giác $BCDE$ là hình thang cân.

b) Đường thẳng AC cắt MO tại F , đường thẳng qua F và song song với AD lần lượt cắt hai đường thẳng AM, AB tại P, Q . Chứng minh rằng F là trung điểm của PQ .

c) Kẻ DS vuông góc với AB ($S \in AB$), kẻ đường kính DL của (O) . Gọi G, I lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B đến DL . Đường tròn ngoại tiếp tam giác SGI cắt AB tại T (T khác S). Chứng minh rằng $\angle AOS = \angle BOT$.

Câu 4 (1,0 điểm). Trong một hộp có 2035 viên bi. Có hai người tham gia trò chơi, mỗi người lần lượt phải bốc ít nhất là 11 viên bi và nhiều nhất là 19 viên bi. Người nào bốc viên bi cuối cùng sẽ thua cuộc. Hãy tìm cách chơi để đảm bảo người bốc đầu tiên luôn là người thắng cuộc.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3 + 4ab \leq 12$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2024ab \leq 2025$.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO
TẠO
THÀNH PHỐ CẦN THƠ**
ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 02 trang)

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP
THÀNH PHỐ**
NĂM HỌC 2024-2025
Khóa ngày 12 tháng 4 năm 2024
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (3,0 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{x - y} - \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}$, với $y > x > 0$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Biết $(x-1)(y-1) + 2\sqrt{xy} = 1$. Tính giá trị của biểu thức P .

Câu 2. (3,0 điểm) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - my = 3 - 4m \\ mx + y = 3m + 2 \end{cases}$ (m là tham số). Chứng minh rằng hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ với mọi giá trị của m và $x_0^2 + y_0^2 - 6(x_0 + y_0) + 17 = 0$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 + x - 2x\sqrt{2x+3} + 14 = 4\sqrt{7-x}$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (m^2 + 2m - 1)x + 2$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + 2 = 0$.

Câu 4. (2,0 điểm) Phòng giáo dục và Đào tạo huyện A chọn một nhóm gồm học sinh cấp Tiểu học và học sinh cấp Trung học cơ sở để tham gia Kỳ thi Violympic cấp tỉnh. Ban đầu, Phòng giáo dục và Đào tạo huyện A dự kiến chọn 60% học sinh Tiểu học trong nhóm học sinh dự thi. Do đơn vị tổ chức không đủ máy vi tính nên Phòng giáo dục và Đào tạo huyện A phải giảm số học sinh dự thi của mỗi cấp là 30. Vì vậy số học sinh Tiểu học được chọn chiếm 62% trong nhóm học sinh dự thi. Hỏi trong nhóm học sinh dự thi theo thực tế có bao nhiêu học sinh của mỗi cấp học?

Câu 5. (2,0 điểm) Anh Bình cần rút tiền trong thẻ ATM để chi tiêu cá nhân nhưng lại quên mật khẩu đăng nhập tài khoản. Biết rằng mật khẩu là một số chính phương A có bốn chữ số, nếu bớt đi mỗi chữ số của số A một đơn vị thì được số mới là số chính phương có bốn chữ số. Em hãy giúp anh Bình tìm lại mật khẩu đã quên.

Câu 6. (4,0 điểm) Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') với $R > R'$ cắt nhau tại hai điểm A và B . Trên tia đối của tia AB lấy điểm C . Qua điểm C kẻ các tiếp tuyến CD, CE với đường tròn (O) , trong đó D, E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn (O') . Các đường thẳng DA, AE cắt đường tròn (O') lần lượt tại M và N và N khác A . Tia DE cắt đoạn thẳng MN tại I . Chứng minh:

a) Các điểm B, N, I, E cùng nằm trên một đường tròn.

b) $AE \cdot MB = AB \cdot MI$.

c) Đường thẳng $O'I$ vuông góc với đường thẳng MN .

Câu 7. (2,0 điểm) Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a + b = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 b^2 (a^2 + b^2)$.

-----HẾT-----

Ghi chú: - Thi sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

ĐÁP ÁN

Câu 1. (3.0 điểm)

$$P = \frac{\sqrt{x^3 - y^3}}{x - y} - \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} \quad y > x > 0$$

Cho biểu thức

với

P

a) Rút gọn biểu thức

$$(x-1)(y-1) + 2\sqrt{xy} = 1$$

b) Biết

. Tính giá trị của biểu thức

P

LỜI GIẢI.

a)

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} - \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y} - x(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + y(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \end{aligned}$$

$$P = \frac{\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})}$$

Vậy

$$(x-1)(y-1) + 2\sqrt{xy} = 1 \Leftrightarrow xy - (x - 2\sqrt{xy} + y) = 0 \Leftrightarrow xy = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

b)

$$\sqrt{xy} = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \sqrt{y} - \sqrt{x} \Rightarrow P = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = -1$$

Vì $y > x > 0$ nên $xy > 0$

Suy ra

Câu 2. (3.0 điểm)

$$\begin{cases} x - my = 3 - 4m & (1) \\ mx + y = 3m + 2 & (2) \end{cases} \quad m$$

Cho hệ phương trình

(m là tham số). Chứng minh rằng hệ phương

$(x_0; y_0)$

m

trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất

với mọi giá trị của

$$x_0^2 + y_0^2 - 6(x_0 + y_0) + 17 = 0$$

LỜI GIẢI.

- Xét $m = 0$, ta có $x = 3, y = 2$ thoả mãn yêu cầu bài toán

- Xét $m \neq 0$: Do $\frac{1}{m} \neq -m$ nên hệ đã cho có nghiệm duy nhất

$$x \neq 3, y \neq 4, y \neq 2 \quad (1) \Rightarrow m = \frac{x-3}{y-4}; (2) \Rightarrow m = \frac{2-y}{x-3}$$

Khi đó: và

$$\frac{x-3}{y-4} = \frac{2-y}{x-3} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = -y^2 + 6y - 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6(x+y) + 17 = 0$$

Suy ra (dpcm)

Câu 3. (4.0 điểm)

$$x^2 + x - 2x\sqrt{2x+3} + 14 = 4\sqrt{7-x}$$

a) Giải phương trình:

$$x^2 - (m^2 + 2m - 1)x + (m+1)^2 - 3 = 0$$

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có

$$x_1, x_2 \quad x_1^2 + x_2^2 + 2 = 0$$

hai nghiệm phân biệt thoả mãn

LỜI GIẢI.

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq 7$$

a) Với điều kiện , hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$x^2 - 2x\sqrt{2x+3} + 2x + 3 + 7 - x - 4\sqrt{7-x} + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2x+3})^2 + (\sqrt{7-x} - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{2x+3})^2 = 0 \\ (\sqrt{7-x} - 2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ (t/m)}$$

$$x = 3$$

Vậy là nghiệm của phương trình đã cho.

b)

$$x^2 + (1 - 2m - m^2)x + m^2 + 2m - 2 = 0$$

Phương trình đã cho tương đương với với các hệ số

$$a = 1, b = 1 - 2m - m^2, c = m^2 + 2m - 2$$

$$1 + 1 - 2m - m^2 + m^2 + 2m - 2 = 0$$

Ta có nhận xét nên phương trình đã cho có nghiệm

$$x = 1, x = m^2 + 2m - 2$$

.

$$x_1^2 + x_2^2 + 2 = 0 (*)$$

Theo giả thiết, , ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $x_1 = m^2 + 2m - 2, x_2 = 1$
 $(*) \Leftrightarrow (m^2 + 2m - 2)^2 + 3 = 0 \quad (m^2 + 2m - 2)^2 + 3 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$
 (vô lí vì)
- Trường hợp 2: $x_1 = 1, x_2 = m^2 + 2m - 2$
 $(*) \Leftrightarrow 1 + m^2 + 2m - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Câu 4. (2.0 điểm)

Phòng giáo dục và Đào tạo huyện A chọn một nhóm học sinh cấp Tiểu học và học sinh cấp Trung học cơ sở để tham gia Kỳ thi Violympic cấp tỉnh. Ban đầu, Phòng giáo dục và Đào tạo huyện A dự kiến chọn 60% học sinh Tiểu học trong nhóm học sinh dự thi. Do đơn vị tổ chức không đủ máy vi tính nên Phòng giáo dục và Đào tạo huyện A phải giảm số học sinh dự thi của mỗi cấp là 30. Vì vậy số học sinh Tiểu học được chọn 62% trong nhóm học sinh dự thi. Hỏi trong nhóm học sinh dự thi theo thực tế có bao nhiêu học sinh của mỗi cấp học?

LỜI GIẢI.

Gọi x, y (học sinh) lần lượt là số học sinh Tiểu học và Trung học cơ sở tham gia Kỳ thi Violympic cấp tỉnh của huyện

Vì ban đầu Phòng giáo dục và Đào tạo huyện A dự kiến chọn 60% học sinh Tiểu học trong nhóm học sinh dự thi nên ta có phương trình:

$$x = 60\%(x + y) \Leftrightarrow 0,4x - 0,6y = 0 \quad (1)$$

Vì sau khi giảm số học sinh của mỗi cấp đi 30, số học sinh tiểu học chiếm 62% nên ta có phương trình:

$$x - 30 = 62\%(x + y - 60) \Leftrightarrow 0,38x - 0,62y = \frac{-36}{5} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 0,4x - 0,6y = 0 \\ 0,38x - 0,62y = \frac{-36}{5} \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 216 \\ y = 144 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: (t/m)

Vậy: số học sinh Tiểu học và Trung học cơ sở tham gia Kỳ thi Violympic cấp tỉnh của huyện A là 216 và 144

Câu 5. (2.0 điểm)

Anh Bình cần rút tiền trong thẻ ATM để chi tiêu cá nhân nhưng lại quên mật khẩu đăng nhập tài khoản. Biết rằng mật khẩu là một số chính phương A có bốn chữ số nếu bớt đi mỗi chữ số của số A một đơn vị thì được số mới là số chính phương có bốn chữ số. Em hãy giúp anh Bình tìm lại mật khẩu đã quên

LỜI GIẢI.

Gọi mật khẩu đăng nhập của anh Bình là $\overline{abcd}$ ($a, b, c, d \in N^*$ $a, b, c, d \leq 9$ $a \geq 2$) và $\overline{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)} = y^2$ và $\overline{abcd} = x^2$

Theo đề bài ta có: $\overline{abcd} = x^2$ và $\overline{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)} = y^2$

Do đó:

$$x^2 - y^2 = 1111 (x, y \in N^*; 32 \leq x, y \leq 99)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 1.1111 = 11.101$$

Vì $32 \leq x, y \leq 99$ nên $x+y \neq 1111$ và $x+y \neq 1$

$$\begin{cases} x+y=1111 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1111 \end{cases}$$

Vậy nên không thể xảy ra trường hợp: hoặc

Mặt khác: $x+y > x-y$ (do x, y là các số nguyên dương) nên chỉ xảy ra trường hợp:

$$\begin{cases} x-y=11 \\ x+y=101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=56 \\ y=45 \end{cases}$$

(nhận)

$$56^2 = 3136$$

Vậy: mật khẩu đăng nhập của anh Bình là

Câu 6. (4.0 điểm)

Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') với $R > R'$ cắt nhau tại hai điểm A và B Trên tia đối của tia AB lấy điểm C . Qua điểm C kẻ cách tiếp tuyến CD, CE với đường tròn (O) , trong đó D, E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn (O') . Các đường thẳng

AD , AE cắt đường tròn (O') lần lượt tại M và N (M và N khác A). Tia DE cắt đoạn thẳng MN tại I . Chứng minh:

a) Các điểm B, N, I, E cùng nằm trên một đường tròn

$$AE \cdot MB = AB \cdot MI$$

b)

c) Đường thẳng $O'I$ vuông góc với đường thẳng MN

LỜI GIẢI.

a) Chứng minh các điểm B, N, I, E cùng nằm trên một đường tròn

$$\widehat{BNI} = \widehat{DAB}$$

Ta có (góc ngoài tứ giác nội tiếp)

$$\widehat{DAB} = \widehat{DEB}$$

Mà (góc nội tiếp cùng chắn BD)

$$B, N, I, E$$

Do đó cùng nằm trên một đường tròn

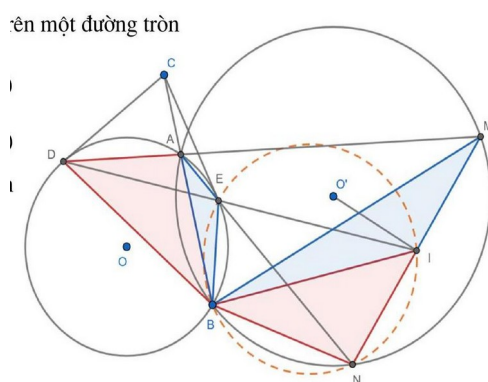
$$AE \cdot MB = AB \cdot MI$$

b) Chứng minh

$$\triangle MIB \text{ và } \triangle AEB$$

Xét và có

$$\widehat{BAE} = \widehat{BMI} \quad (\text{góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{BN})$$



$$\widehat{BEN} = \widehat{BIN}$$

Mặt khác (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BN}$)

$$\widehat{BEN} \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{BIN}$$

$$\Rightarrow \triangle MIB \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{MI}{AE} = \frac{MB}{AB} \Leftrightarrow AE \cdot MB = AB \cdot MI \text{ (dpcm)}$$

c) Đường thẳng $O'I$ vuông góc với đường thẳng MN

$$\square MIB \sim \square AEB \Rightarrow \frac{MI}{AE} = \frac{IB}{EB} \Leftrightarrow IM = \frac{AE}{EB} \cdot BI$$

Ta có (cmt) (1)

Mặt khác, xét $\square DAB$ và $\square INB$ có $\angle BNI = \angle BAD$

(góc ngoài tứ giác nội tiếp)

$$\angle BDA = \angle BEN = \angle BIN \Rightarrow \triangle DAB \sim \triangle INB \Rightarrow \frac{IN}{AD} = \frac{IB}{DB} \Leftrightarrow IN = \frac{AD}{DB} \cdot IB$$

Xét $\square ACE$ và $\square ECB$ có

$$\angle AEC = \angle CBE$$

(góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\square BCE$ chung

$$\Rightarrow \square ACE \sim \square ECB \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{AE}{EB}$$

$$\Rightarrow \square DCA \sim \square BCD \Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{AD}{DB}$$

Tương tự

$$\Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DB} (CE = CD)$$

Từ (3), (4) tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) (5)

$$\Rightarrow IM = IN \Rightarrow O'I \perp MN$$

Từ (1), (2), (5) (đpcm)

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DB}$$

Nhận xét: Tứ giác $AEBD$ được gọi là tứ giác điều hòa và tỉ lệ chính là một tính chất của tứ giác điều hòa mà các em sẽ được học ở chương trình chuyên

Câu 7. (2.0 điểm)

Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a + b = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 b^2 (a^2 + b^2)$

LỜI GIẢI.

Cách 1 :

$$2 = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq 1$$

Ta có

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 4 - 2ab$$

Lại có

$$P = a^2b^2(a^2 + b^2) = \frac{a^2b^2(4 - 2ab)}{1} \leq \frac{a^2b^2(4 - 2ab)}{ab} = 4ab - 2a^2b^2$$

Mà

$$ab = t(0 < t \leq 1) \Rightarrow 2 - t > 0$$

Đặt với

$$P = 4t - 2t^2 = 2 \cdot t(2 - t) \leq 2 \cdot \frac{(t + 2 - t)^2}{4} = 2$$

Khi đó

$$t = 1$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} ab = 1 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1$$

$$\text{Max } P = 2$$

Vậy, đẳng thức xảy ra khi

Cách 2:

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Ta có

$$P \leq ab(a^2 + b^2) \quad 2P \leq 2ab(a^2 + b^2) \leq \frac{(a^2 + 2ab + b^2)^2}{4} = \frac{(a+b)^4}{4} = 4$$

Do đó

hay

$$2P \leq 4 \Leftrightarrow P \leq 2$$

$$a = b = 1$$

Vậy

, dấu bằng xảy ra khi

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC GIANG**

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2024-2025
MÔN THI: TOÁN - LỚP 9**

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 03 trang)

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian giao đề.

Mã đề thi: 191

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM. (6,0 điểm).

$$P = \frac{4xy^2}{x^2 - y^2} \sqrt{\frac{x^2 - 2xy + y^2}{16x^2y^4}}$$

Câu 1: Rút gọn biểu thức

với $x < y < 0$ ta được

A. $P = \frac{-1}{x-y}$

B. $P = \frac{-1}{x+y}$

C. $P = \frac{1}{x-y}$

D. $P = \frac{1}{x+y}$

Câu 2: Cho đường tròn (O) có dây cung $AB = 28$. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB . Biết khoảng cách từ M đến dây AB bằng 2. Bán kính của đường tròn (O) là

A. 40. B. 50. C. 30. D. 45.

Câu 3: Cho hình thang $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$, $AD = 3$, $DB \perp DC$. Diện tích S của hình thang $ABCD$ là

A. $S = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

B. $S = \frac{7\sqrt{3}}{4}$

C. $S = 14\sqrt{3}$

D. $S = 7\sqrt{3}$

Câu 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = (5m-6)x - 15m + 25$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng d . Gọi m_0 là giá trị của tham số m để

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 26$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $m_0 < -3$. B. $-3 \leq m_0 < -1$. C. $m_0 \geq 1$. D. $-1 \leq m_0 < 1$.

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 8$. Gọi A, B là các giao điểm của (d) và (P) . Tọa độ tất cả các điểm trên (P) cách đều hai điểm A, B là

- A. $\left(\frac{7}{2}; \frac{49}{4}\right), (-3; 9)$ B. $\left(\frac{-7}{2}; \frac{49}{4}\right), (-3; 9)$ C. $\left(\frac{-7}{2}; \frac{49}{4}\right), (3; 9)$ D. $\left(\frac{7}{2}; \frac{49}{4}\right), (3; 9)$

Câu 6: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và M là điểm di động trên đường tròn $(M \neq A, B)$. Kẻ MH vuông góc với AB tại H . Diện tích tam giác MOH lớn nhất bằng

- A. $\frac{R^2}{4}$. B. $\frac{R^2}{6}$. C. $\frac{R^2}{3}$. D. $\frac{R^2 \sqrt{2}}{4}$.

Câu 7: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \leq 3, y \geq 0$ và $x^2 - y^2 = 2x - 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-3y+3}$ bằng

- A. $\sqrt{7}$. B. $2\sqrt{5}$. C. $\sqrt{14}$. D. $\sqrt{10}$.

Câu 8: Cho biểu thức $P = \frac{20}{10 - 5\sqrt{3}}$. Khi rút gọn P về dạng $P = a + b\sqrt{3}$, với a và b là các số nguyên, tính ab

- A. $ab = -8$. B. $a \cdot b = 8$. C. $ab = -32$. D. $ab = 32$.

Câu 9: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính BC, điểm A thay đổi trên nửa đường tròn (A không trùng với B và C). Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Gọi I, K lần lượt là các điểm đối xứng với H qua AB và AC. Diện tích tứ giác BIKC lớn nhất bằng

- A. $\frac{3R^2}{4}$. B. $2R^2$. C. $\frac{2R^2}{3}$. D. R^2 .

Câu 10: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 5m - 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ (m là tham số). Số giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - 2y = -2$ là

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 11: Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và hai điểm $A(-2; 2), B(4; 8)$ nằm trên (P) . Gọi M là điểm thay đổi trên (P) và có hoành độ là $m (-2 < m < 4)$. Khi tam giác ABM có diện tích lớn nhất, độ dài của đoạn thẳng OM là

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{5}$. D. 0.

Câu 12: Tích các giá trị của tham số m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $y = 2x + m - 1$ bằng 1 là

- A. -4. B. 6. C. 24. D. -24.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để các hàm số $y = (3 - 2m)x + \frac{5}{m} - m$ và

$y = \frac{3}{\sqrt{2m+3}}x + m^2 + 1$ cùng đồng biến trên $\square$?

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

$$Q = \frac{(b+c)\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)}}$$

Câu 14: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Rút gọn biểu thức Q , ta được

- A. $Q = \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$ B. $Q = 1$ C. $Q = 3bc$ D. $Q = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Câu 15: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+my=m+1 \\ mx+y=3m-1 \end{cases}$ (m là tham số). Tổng bình phương các số nguyên m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ mà x, y đều là số nguyên là

A. 14. B. 9. C. 13. D. 0.

Câu 16: Cho tam giác ABC cân tại A và $AB=5, BC=6$. Kẻ đường cao BH của tam giác ABC. Tỉ số $\frac{AH}{AC}$ bằng

- A. $\frac{7}{25}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{2}{7}$

Câu 17: Cho phương trình: $x^2+(m-2)x-m^2+2m-3=0$ (x là ẩn, m là tham số). Tổng tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $|x_1+x_2|=2|x_1-x_2|$ là

A. 12. B. 3. C. 18. D. 15.

$a-\sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $2a+b=19$ B. $2a+b=17$ C. $2a+b=8$ D. $2a+b=14$

Câu 19: Cho đường tròn $(O, 4\sqrt{3})$ có hai dây AB và CD vuông góc với nhau. Khi đó AD^2+BC^2 bằng

A. 80. B. 96. C. 192. D. $48\sqrt{3}$

Câu 20: Cho phương trình $x^2-3(m+1)x+2m^2+5m+2=0$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $|x_1+x_2|=2|x_1-x_2|$?

A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

II. PHẦN TỰ LUẬN. (14,0 điểm).

Câu 1. (5,0 điểm)

$$P = \frac{x-4\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} + \frac{1-3\sqrt{x}+x}{x^2+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}, \text{ với } x > 0.$$

- Rút gọn biểu thức P .
- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: y=(m-1)x+m-2 (m \neq 1)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.
- Giải phương trình $8x^3+26x^2+3\sqrt{5x+1}=13x+3$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên dương a, b để $a^2b^2-4a-4b$ là số chính phương. Chứng minh $4f(-2-\sqrt{7})+3$ là một số nguyên tố.

2. Cho đa thức $f(x)=x^{2024}+a_{2023}x^{2023}+a_{2022}x^{2022}+\dots+a_1x+a_0 (a_0, a_1, \dots, a_{2023} \in \mathbb{Z})$ có $f(\sqrt{7}-2)=20$. Chứng minh $4f(-2-\sqrt{7})+3$ là một số nguyên tố.

Câu 3. (4,0 điểm) Cho đường tròn (O, R) có dây BC cố định ($BC \neq 2R$). Trên cung lớn BC của đường tròn lấy điểm A sao cho $AC > AB > BC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Các tia BI, CI cắt DE theo thứ tự tại M, N.

- Chứng minh tứ giác BIND là tứ giác nội tiếp

2. Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt cạnh BC tại điểm P. Gọi F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN. Chứng minh $MN \cdot PF = 2MF \cdot NP$.

3) Khi điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho $AC > AB > BC$, chứng minh $\frac{AB + BC + CA}{MN + MD + NE}$ không đổi.

Câu 4. (1,0 điểm) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{\sqrt{15x^2 + 26xy + 8y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{15y^2 + 26yz + 8z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{15z^2 + 26zx + 8x^2}}.$$

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Cán bộ coi thi số 1 (Họ tên và chữ ký)

Cán bộ coi thi số 2 (Họ tên và chữ ký)

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC GIANG**

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 03 trang)

**HDC ĐỀ THI CHÍNH THỨC
HƯỚNG DẪN CHẤM TỰ LUẬN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH
GIỎI VĂN HÓA CẤP TỈNH**

**Năm học 2024-2025
MÔN THI: TOÁN - LỚP 9**
Bản hướng dẫn chấm có 07 trang

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM. (6 điểm – Mỗi đáp án đúng được 0,3 điểm).

Mã đề thi: 191

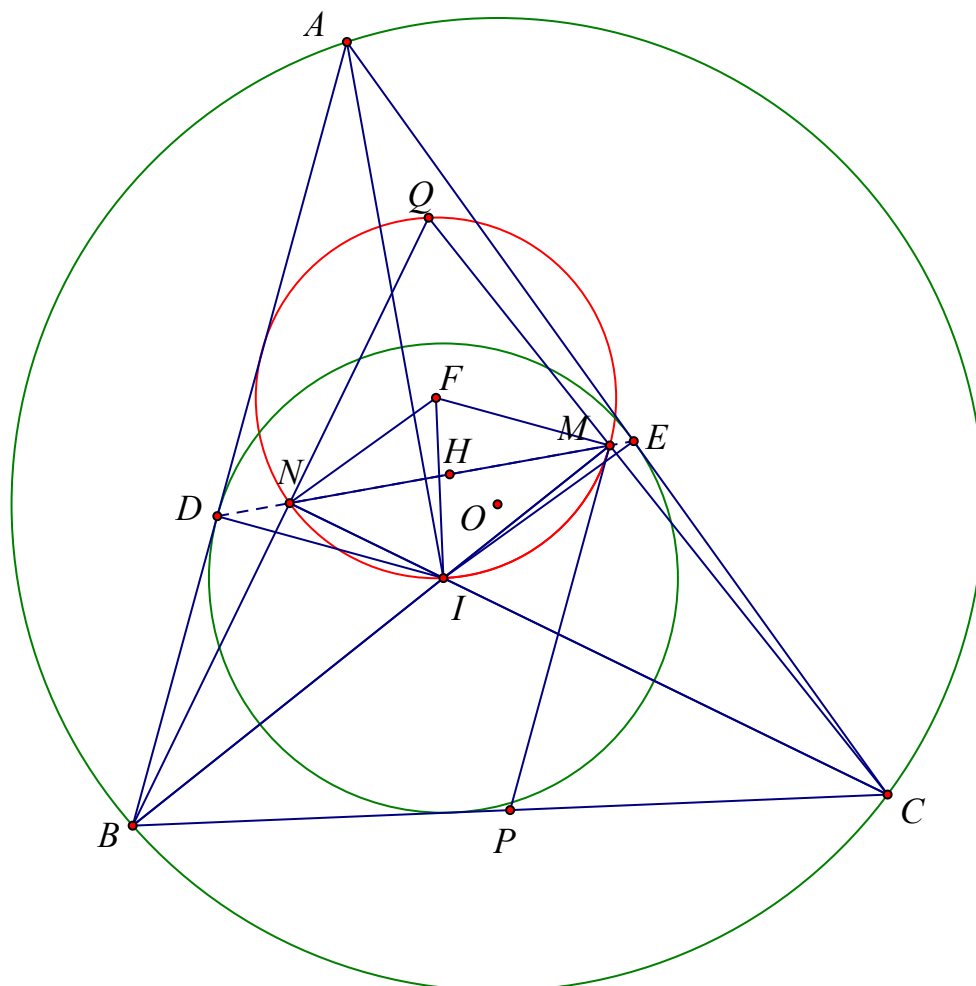
1.D	2.B	3.A	4.C	5.C	6.A	7.D	8.D	9.B	10.B
11.A	12.A	13.D	14.B	15.C	16.A	17.B	18.D	19.C	20.C

II. PHẦN TỰ LUẬN. (14,0 điểm).

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1.		5,00
1.	Rút gọn biểu thức $P = \frac{x-4\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} + \frac{1-3\sqrt{x}+x}{x^2+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}$, với $x > 0$.	2,00
(2,0 Điểm)	Với $x > 0$, ta có: $P = \frac{x-4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{1-3\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(x-\sqrt{x}+1)}$	0,50
	$= \frac{\sqrt{x}(x-4\sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{1-3\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$	0,50
	$= \frac{x\sqrt{x}-2x-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$	0,50
	$= \frac{\sqrt{x}(x+1)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-3}{x-\sqrt{x}+1}.$	0,50
2.	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: y = (m-1)x + m - 2 (m \neq 1)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.	1,50
(1,5 điểm)	d cắt trục Ox tại $A\left(\frac{2-m}{m-1}; 0\right)$, d cắt trục Oy tại $B(0; m-2)$	0,25
	Tam giác AOB vuông tại O , có $OA = \left \frac{2-m}{m-1}\right , OB = m-2 $	0,25
	$S_{AOB} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} OA \cdot OB = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left \frac{2-m}{m-1}\right \cdot m-2 = 2$	0,25
	$\Leftrightarrow (m-2)^2 = 4 m-1 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 = 4(m-1) & (1) \\ (m-2)^2 = -4(m-1) & (2) \end{cases}$	0,25
	$+ (1) \Leftrightarrow m^2 - 8m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = 4 \pm 2\sqrt{2}$ (thỏa mãn)	0,25
	$+ (2) \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn). Vậy các giá trị cần tìm của m là $m = 0, m = 4 \pm 2\sqrt{2}$.	0,25
3.	Giải phương trình $8x^3 + 26x^2 + 3\sqrt{5x+1} = 13x + 3$.	1,50
(1,5 điểm)	Điều kiện xác định: $5x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{5} (*)$	0,25
	Phương trình đã cho tương đương với $(8x^3 + 26x^2 - 7x) - (6x + 3) + 3\sqrt{5x+1} = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x(4x-1)(2x+7) - 3[(2x+1) - \sqrt{5x+1}] = 0$ $\Leftrightarrow x(4x-1)(2x+7) - \frac{3(4x^2-x)}{(2x+1)+\sqrt{5x+1}} = 0$ $\Leftrightarrow x(4x-1) \left(2x+7 - \frac{3}{(2x+1)+\sqrt{5x+1}} \right) = 0$	0,25

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{4} \\ 2x + 7 - \frac{3}{2x+1+\sqrt{5x+1}} = 0 \end{cases}$ <p>Nhận thấy $x = 0$ và $x = \frac{1}{4}$ là các giá trị thỏa mãn.</p>	0,25
	<p>Xét phương trình (2):</p> $2x + 7 - \frac{3}{2x+1+\sqrt{5x+1}} = 0$ $x \geq -\frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq \frac{3}{5} \\ \sqrt{5x+1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2x+1+\sqrt{5x+1}} \Rightarrow 5 \\ 2x+7 - \frac{3}{2x+1+\sqrt{5x+1}} \geq \frac{8}{5} > 0 \end{cases}$	0,25
	<p>Do đó (2) vô nghiệm.</p> <p>Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left\{0; \frac{1}{4}\right\}$.</p>	0,25
Câu 2.		4,00
1.	<p>Tìm các số nguyên dương a, b để $a^2b^2 - 4a - 4b$ là số chính phương. Chứng minh $4f(-2 - \sqrt{7}) + 3$ là một số nguyên tố.</p>	2,00
(2,0 điểm)	<p>Ta có $a^2b^2 - 4a - 4b$ là số chính phương, suy ra $a^2b^2 - 4a - 4b = m^2$ (*) với m là một số tự nhiên.</p> <p>Do a, b là các số nguyên dương nên $a^2b^2 - 4a - 4b < a^2b^2$, hay $m^2 < a^2b^2 = (ab)^2$ (1).</p>	0,5
	<p>Ta thấy nếu $ab = 1$ khi $(a; b) = (1; 1)$ hoặc $ab = 2$ khi $(a; b) = (1; 2), (2; 1)$ đều không thỏa mãn $a^2b^2 - 4a - 4b$ là số chính phương, nên có $ab > 2 \Rightarrow ab - 2 > 0$. Xét hiệu $m^2 - (ab - 2)^2 = 4ab - 4a - 4b - 4$</p> <p>Nếu $4ab - 4a - 4b - 4 > 0$ thì $m^2 > (ab - 2)^2$, kết hợp với (1) ta được $(ab - 2)^2 < m^2 < (ab)^2$</p>	0,25
	<p>Suy ra $m^2 = (ab - 1)^2$ (vì $ab - 2 > 0$)</p> <p>Khi đó ta có $(ab)^2 - 4a - 4b = (ab - 1)^2 \Leftrightarrow 2ab - 4a - 4b = 1$ (vô lý do $2ab - 4a - 4b$ luôn chẵn).</p>	0,25
	<p>Do đó $m^2 - (ab - 2)^2 = 4ab - 4a - 4b - 4 \leq 0 \Rightarrow 4ab - 4a - 4b - 4 \leq 0$</p> <p>$\Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (a - 1)(b - 1) \leq 2$ (vì a, b là các số nguyên dương)</p> <p>Xét các trường hợp</p> <p>TH1: $(a - 1)(b - 1) = 1$ dễ thấy $(a; b) = (2; 2)$ thỏa mãn bài toán.</p> <p>TH2: $(a - 1)(b - 1) = 2$ dễ thấy $(a; b) = (2; 3), (3; 2)$ thỏa mãn bài toán.</p>	0,5
	<p>TH3: $(a - 1)(b - 1) = 0$ suy ra $a = 1$ hoặc $b = 1$.</p> <p>Với $a = 1$, từ (*) ta có $b^2 - 4b - 4 = m^2 \Leftrightarrow (b - 2)^2 - 8 = m^2 \Leftrightarrow (b - 2)^2 - m^2 = 8$ (*)</p>	

	<p>Từ (2^*) và b nguyên dương ta thấy $b-2 > m \left(m \in \mathbb{N}^* \right)$ hay $b-2-m > 0$ và có</p> $(2^*) \Leftrightarrow (b-2-m) \cdot (b-2+m) = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} b-2-m=1 \\ b-2+m=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{13}{2} \\ m=\frac{7}{2} \end{cases} \text{ không thỏa mãn.}$ <p>hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} b-2-m=2 \\ b-2+m=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5 \\ m=1 \end{cases}$, ta được $(a;b) = (1;5)$.</p> <p>Với $b=1$, tương tự ta có $(a;b) = (5;1)$.</p> <p>Vậy các cặp số $(a;b)$ nguyên dương thỏa mãn là: $(1;5), (5;1), (2;2), (2;3), (3;2)$.</p>	0,5
2.	<p>Cho đa thức $f(x) = x^{2024} + a_{2002}x^{2023} + a_{2022}x^{2022} + \dots + a_1x + a_0$, với $a_0, a_1, \dots, a_{2023} \in \mathbb{Q}$ và $f(\sqrt{7}-2) = 20$. Chứng minh $4f(-2-\sqrt{7})+3$ là một số nguyên tố.</p>	2,00
(2,0 điểm)	<p>Đặt $g(x) = f(x) - 20$, ta có $g(\sqrt{7}-2) = f(\sqrt{7}-2) - 20 = 0$.</p> <p>Dễ thấy $g(x)$ là một đa thức bậc 2024 với các hệ số nguyên.</p> <p>Giả sử khi chia đa thức $g(x)$ cho đa thức $x^2 + 4x - 3$ được thương là đa thức $h(x)$ và đa thức dư có dạng $ax + b (a, b \in \mathbb{Q})$</p>	0,50
	<p>$\Rightarrow g(x) = (x^2 + 4x - 3) \cdot h(x) + ax + b (a, b \in \mathbb{Q})$.</p> <p>Thay $x = \sqrt{7} - 2$ ta có:</p> $0 = 0h(\sqrt{7}-2) + a(\sqrt{7}-2) + b \Leftrightarrow a(\sqrt{7}-2) + b = 0 \Leftrightarrow a\sqrt{7} + (b-2a) = 0 \quad (1)$	0,50
	<p>Vì $\sqrt{7}$ là số vô tỉ và a, b là các số hữu tỉ nên từ (1) suy ra</p> $\begin{cases} a = 0 \\ b - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$ <p>Từ đó, $g(x) = (x^2 + 4x - 3)h(x)$</p>	0,50
	<p>Thay $x = -2 - \sqrt{7}$ ta được $g(-2-\sqrt{7}) = 0 \cdot h(-2-\sqrt{7})$</p> $\Leftrightarrow f(-2-\sqrt{7}) - 20 = 0 \Leftrightarrow f(-2-\sqrt{7}) = 20 \Rightarrow 4f(-2-\sqrt{7}) + 3 = 4 \cdot 20 + 3 = 83.$ <p>Vì 83 là số nguyên tố nên ta có điều phải chứng minh.</p>	0,50
Câu 3.	<p>Đường tròn (O, R) có dây BC cố định $(BC \neq 2R)$. Trên cung lớn BC của đường tròn lấy điểm A sao cho $AC > AB > BC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Các tia BI, CI cắt DE theo thứ tự tại M, N.</p>	4,00



1.	<p>Chứng minh tứ giác BIND là tứ giác nội tiếp.</p>	1,50
(1,5 điểm)	<p>Ta có $\angle BIN$ là góc ngoài của tam giác IBC $\Rightarrow \angle BIN = \angle IBC + \angle ICB = \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle ACB}{2} = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2}$ (1) (do IB, IC lần lượt là các tia phân giác của góc $\angle ABC, \angle ACB$)</p>	0,50
	<p>AD, AE là tiếp tuyến của đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên $AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A $\Rightarrow \angle ADE = \angle AED$ Xét hai tam giác ABC, ADE có chung góc $\angle BAC$ nên $\angle ABC + \angle ACB = 2\angle ADE \Rightarrow \angle ADE = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2}$ (2) Từ (1), (2) suy ra $\angle BIN = \angle ADE$ hay $\angle BIN = \angle ADN$ (3)</p>	0,50
	<p>Do hai góc $\angle BDN, \angle ADN$ là hai góc kề bù nên $\angle BDN + \angle ADN = 180^\circ$ (4) Từ (3), (4) ta có $\angle BDN + \angle BIN = 180^\circ$ Xét tứ giác BDNI có $\angle BDN + \angle BIN = 180^\circ$ và hai góc $\angle BDI, \angle BIN$ ở vị trí đối diện nên tứ giác BDNI là tứ giác nội tiếp một đường tròn.</p>	0,50
2.	<p>Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt cạnh BC tại điểm P. Gọi F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN. Chứng minh $MN \cdot PF = 2MF \cdot NP$.</p>	1,50
	<p>Tương tự phần a. ta có tứ giác BDNI nội tiếp $\Rightarrow \angle BNI = \angle BDI$ mà $\angle BDI = 90^\circ$ ($ID \perp AB$) nên $\angle BNI = 90^\circ \Rightarrow \angle BNI$ vuông tại N.</p>	0,25

(1,5 điểm)	<p>Chứng minh tung tự ta được $\square CMI$ vuông tại M.</p> <p>Gọi J là trung điểm của BC suy ra $JM = JN = JB = JC = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \square MB$ cân tại J</p> <p>nên $\angle JMB = \angle JBM$, mặt khác $\angle JBM = \angle JBA$ (do BM là phân giác góc $\angle ABC$)</p> <p>$\angle JMB = \angle MBA \Rightarrow JM \parallel AB$ (2 góc ở vị trí so le trong) $\Rightarrow J \equiv P$</p>	
	<p>Theo trên ta có $PM = PN$ (1) Mà F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN nên $FM = FN$</p> <p>$MP \parallel AB \Rightarrow \angle BMP = \angle BMN \Rightarrow \angle BMP = \angle MBP$ (do BI là phân giác của $\angle ABC$)</p> <p>Suy ra tam giác PBM cân tại P nên $PM = PB$ (2)</p> <p>Từ (1), (2) suy ra FP là đường trung trực của đoạn thẳng MN.</p> <p>Gọi H là trung điểm của MN thì $NH \perp FP$</p>	0,25
	<p>Gọi Q là giao của BN và CM</p> <p>Ta có $BM \perp CQ, CN \perp BQ$ nên giao điểm I của hai đường BM, CN là trực tâm của tam giác BCQ suy ra $QI \perp BC \Rightarrow \angle QBC + \angle BQI = 90^\circ$ mà $\angle QBC = \angle BNP$ nên $\angle BNP + \angle BQI = 90^\circ$ (3)</p>	0,25
	<p>Tứ giác $MINQ$ nội tiếp đường tròn đường kính IQ (vì $\angle IMQ = \angle INQ = 90^\circ$) mà F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN nên F là trung điểm của IQ suy ra $\angle NQF = \angle FNQ$ hay $\angle BQI = \angle FNQ$ (4)</p>	0,25
	<p>Thay (4) vào (3) ta được: $\angle BNP + \angle FNQ = 90^\circ \Rightarrow \angle PNF = 90^\circ \Rightarrow \square FNP$ vuông tại N</p>	0,25
	<p>$\square FNP$ vuông tại N, có NH là đường cao nên</p> $NH \cdot PF = NF \cdot NP \Rightarrow \frac{1}{2}MN \cdot PF = MF \cdot NP \Rightarrow MN \cdot PF = 2MF \cdot NP \quad (MF = NF)$	0,25
3.	<p>Khi điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho $AC > AB > BC$, chứng minh $\frac{AB + BC + CA}{MN + MD + NE}$ không đổi.</p>	1,00
(1,0 điểm)	<p>Ta có $\frac{AB + BC + CA}{MN + MD + NE} = \frac{AB}{NE} = \frac{BC}{MN} = \frac{CA}{MD}$</p> <p>$\angle BNC = \angle CMB = 90^\circ$ nên tứ giác $BCMN$ nội tiếp $\Rightarrow \angle MNI = \angle MBC, \angle IMN = \angle ICB$</p> <p>$\Rightarrow \square IBC \sim \square INM (g \cdot g) \Rightarrow \frac{BC}{MN} = \frac{IB}{IN}$ (1)</p>	0,25
	<p>Ta có tứ giác $BDNI$ nội tiếp $\angle NBI = \angle IDN$</p> <p>Mà $\angle IDN = \angle DAI$ (cùng phụ với góc $\angle ADN$) suy ra $\angle IBN = \angle DAI$</p> <p>Xét hai tam giác vuông NBI, DAI tại N và D có $\angle IBN = \angle DAI$ nên</p> $\square NBI \sim \square DAI (g \cdot g) \Rightarrow \frac{IB}{IN} = \frac{IA}{ID} \quad (2)$ <p>Từ (1) và (2) ta có $\frac{BC}{MN} = \frac{IA}{ID}$ (3)</p>	0,25
	<p>Tứ giác $BCMN$ nội tiếp suy ra $\angle MNC = \angle MBC = \angle IBA$ (IB là phân giác góc $\angle ABC$)</p> <p>Do $\angle IDA = \angle IEA = 90^\circ$ nên tứ giác $ADIE$ nội tiếp suy ra $\angle IEN = \angle IAB$</p> <p>Suy ra $\square IAB \sim \square IEN (g \cdot g) \Rightarrow \frac{AB}{NE} = \frac{IA}{IE} = \frac{IA}{ID} \quad (IE = ID) \quad (4)$</p>	0,25

	$\Rightarrow \frac{AC}{MD} = \frac{IA}{ID} \quad (5)$ <p>Chúng minh tương tự ta cũng có</p>	
	$\Rightarrow \frac{AB+BC+CA}{MN+MD+NF} = \frac{IA}{ID} \quad (5)$ <p>Từ (3), (4), (5) ta có</p> $\sin \angle DAI = \frac{ID}{IA}$ <p>Tam giác IAD vuông tại I, nên</p> <p>Trong đường tròn (O, R), có góc nội tiếp $\angle BAC$ chắn cung BC cố định suy ra</p> $\angle BAC = 2\angle DAI \text{ không đổi} \Rightarrow \sin \angle DAI = \frac{ID}{IA} \text{ không đổi} \Rightarrow \frac{AB+BC+CA}{MN+MD+NF} \text{ không đổi.}$	0,25
Câu 4.	<p>Câu 4. (1,0 điểm) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:</p> $P = \frac{x^2}{\sqrt{15x^2+26xy+8y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{15y^2+26yz+8z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{15z^2+26zx+8x^2}}.$	1,00
(1,0 điểm)	<p>Với mọi $x, y, z > 0$:</p> <p>Ta có $\sqrt{15x^2+26xy+8y^2} = \sqrt{(4x+3y)^2 - (x-y)^2} \leq \sqrt{(4x+3y)^2} = 4x+3y$</p> $\Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{15x^2+26xy+8y^2}} \geq \frac{x^2}{4x+3y} \quad (1)$	0,25
	<p>Tương tự ta cũng có $\frac{y^2}{\sqrt{15y^2+26yz+8z^2}} \geq \frac{y^2}{4y+3z} \quad (2)$ và</p> $\frac{z^2}{\sqrt{15z^2+26zx+8x^2}} \geq \frac{z^2}{4z+3x} \quad (3) \Rightarrow P \geq \frac{x^2}{4x+3y} + \frac{y^2}{4y+3z} + \frac{z^2}{4z+3x} \quad (1^*)$	0,25
	<p>Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{x^2}{4x+3y} + \frac{4x+3y}{49} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{4x+3y} \cdot \frac{4x+3y}{49}} = \frac{2x}{7} \quad (4)$</p> <p>Tương tự ta cũng có $\frac{y^2}{4y+3z} + \frac{4y+3z}{49} \geq \frac{2y}{7} \quad (5)$ và $\frac{z^2}{4z+3x} + \frac{4z+3x}{49} \geq \frac{2z}{7} \quad (6)$</p> <p>Cộng hai vế của (4), (5), (6) ta được</p> $\frac{x^2}{4x+3y} + \frac{y^2}{4y+3z} + \frac{z^2}{4z+3x} + \frac{7(x+y+z)}{49} \geq \frac{2(x+y+z)}{7}$ $\Leftrightarrow \frac{x^2}{4x+3y} + \frac{y^2}{4y+3z} + \frac{z^2}{4z+3x} \geq \frac{x+y+z}{7} = \frac{3}{7} \quad (2^*)$	0,25
	<p>Từ (1*) và (2*) ta suy ra $P \geq \frac{3}{7}, \forall x, y, z > 0$. Dấu bằng xảy ra khi (1), (2), (3), (4), (5), (6), (1*), (2*) cùng thỏa mãn, ta được $x=y=z=1$.</p> <p>Vậy $\min P = \frac{3}{7}$ khi $x=y=z=1$.</p>	0,25
		14,00

Lưu ý khi chấm bài:

- Trên đây chỉ là so lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác vẫn đúng thì vẫn được điểm theo thang điểm tương ứng.
- Với bài toán hình học nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.

Môn thi: TOÁN - BẢNG A

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) thỏa mãn: $m^2 + m = 3^{2024n} + 19$.

b) Cho a, b, c, d là các số nguyên biết $a + 3b = c + 2d$.

Chứng minh rằng $a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2$ viết được dưới dạng tổng ba số chính phương

Câu 2 (7,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y)^3 + (x-y)(xy+x-y) + xy = 0 \\ y(y+2)(y+5)(x+2) = 35x^2 \end{cases}$$

b) Giải phương trình $4(x-1)^2\sqrt{x+1} - 4(x-1)\sqrt{x^2-1} = (x^2+2)(x^2-2x)$

Câu 3 (1,5 điểm). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c + 3b = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{5}{b+c-a} + \frac{7}{a+b-c} + \frac{8}{a+c-b}.$$

Câu 4 (7,5 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ cố định và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn $(O; R)$ (B, C là các tiếp điểm). Qua A vẽ đường thẳng cố định cắt

đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm phân biệt I và E (I nằm giữa hai điểm A, E và $\angle EBC < 90^\circ$). Gọi H là giao điểm của AO và BC . Qua H vẽ đường thẳng (d) song song với BE , biết (d) cắt các đường thẳng BI, BA lần lượt tại Q và N . Đường thẳng BE cắt đường thẳng AO tại K . Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AQ và BK .

a) Chứng minh rằng $\frac{BI}{CI} = \frac{BE}{CE}$

b) Chứng minh rằng HB là đường phân giác của $\angle NHM$

c) Vẽ đường tròn $(P; R_1)$ thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm I và E . Từ A vẽ hai tiếp tuyến AD, AJ với đường tròn $(P; R_1)$ (D, J là các tiếp điểm). Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng DJ và AE . Chứng minh đường tròn đường kính TP luôn đi qua 2 điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong phòng có 121 người, biết mỗi người quen với ít nhất 81 người khác. Chứng minh rằng trong phòng phải có 4 người từng đôi một quen nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) thỏa mãn: $m^2 + m = 3^{2024n} + 19$.

Trường hợp 1: với $n < 0$, $m^2 + m$ là số nguyên, $3^{2024n} + 19$ không phải là số nguyên (Loại)

Trường hợp 2: Với $n = 0 \Rightarrow m^2 + m = 20 \Rightarrow m^2 + m - 20 = 0 \Rightarrow (m-4)(m+5) = 0$

Do đó $m = 4$ (thỏa mãn), $m = -5$ (thỏa mãn)

Trường hợp 3: Với $n > 0$ ta có $3^{2024n} + 19$ chia 3 dư 1

Ta có: $m^2 + m = m(m+1)$, nếu $m = 3k, m = 3k+2 \Rightarrow m(m+1) \vdots 3$

Nếu $m = 3k+1 \Rightarrow m(m+1)$ chia 3 dư 2 $\Rightarrow m^2 + m = 3^{2024n} + 19$ vô lí

Vậy $(m, n) = (4, 0), (m, n) = (-5, 0)$

b) Cho a, b, c, d là các số nguyên biết $a + 3b = c + 2d$.

Chứng minh rằng $a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2$ viết được dưới dạng tổng ba số chính phương

Từ $a + 3b = c + 2d \Rightarrow a + 3b - c - 2d = 0 \Rightarrow 2a(a + 3b - c - 2d) = 0$

Ta có: $a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2 = a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2 + 2a(a + 3b - c - 2d)$

$$= a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2 + 2a^2 + 6ab - 2ac - 4ad = (a - c)^2 + (a - 2d)^2 + (a + 3b)^2$$

(đpcm)

Câu 2 (7,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y)^3 + (x-y)(xy+x-y) + xy = 0 \\ y(y+2)(y+5)(x+2) = 35x^2 \end{cases}$$

Từ pt (1) ta có

$$\Leftrightarrow (x-y)^3 + (x-y)^2 + (x-y)xy + xy = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)(x^2 - xy + y^2) = 0$$

$$x^2 - xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

Trường hợp 1:

thỏa mãn pt (2)

Trường hợp 2: $x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$ thay vào phương trình (2)

Ta có: $(x+1)(x+6)(x+3)(x+2) = 35x^2$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 5x + 6) = 35x^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{x} + 7\right)\left(x + \frac{6}{x} + 5\right) = 35$$

(vì $x = 0$ không là nghiệm)

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{x}\right)^2 + 12\left(x + \frac{6}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{6}{x} = 0 \\ x + \frac{6}{x} = -12 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm:

$$(0; 0), (-6 + \sqrt{30}; -5 + \sqrt{30}), (-6 - \sqrt{30}; -5 - \sqrt{30})$$

b) Giải phương trình $4(x-1)^2\sqrt{x+1} - 4(x-1)\sqrt{x^2-1} = (x^2+2)(x^2-2x)$

ĐKXĐ: $x = -1$ hoặc $x \geq 1$

Xét $x = -1$ (không thỏa mãn)

Xét $x \geq 1$ ta có pt $\Leftrightarrow 4(x-1)\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x-1}-1) = (x^2+2)(x^2-2x)$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)\sqrt{x^2-1} \cdot \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} = x(x^2+2)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{4(x-1)\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}+1} = x(x^2+2) \end{cases}$$

Ta có $x = 2$ (thỏa mãn)

Với $\frac{4(x-1)\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}+1} = x(x^2+2) \Leftrightarrow 4(x-1)\sqrt{x^2-1} = x(x^2+2)(\sqrt{x-1}+1)$

Ta có: $\sqrt{x-1}+1 > \sqrt{x-1}, x \geq 2\sqrt{x-1}, x^2+2 > 2\sqrt{x^2-1}$ (với $x \geq 1$)

$$\Rightarrow 4(x-1)\sqrt{x^2-1} < x(x^2+2)(\sqrt{x-1}+1) \text{ nên phương trình (*) vô nghiệm}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c + 3b = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{5}{b+c-a} + \frac{7}{a+b-c} + \frac{8}{a+c-b}.$$

$$P = 2\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+b-c}\right) + 3\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b}\right) + 5\left(\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b}\right)$$

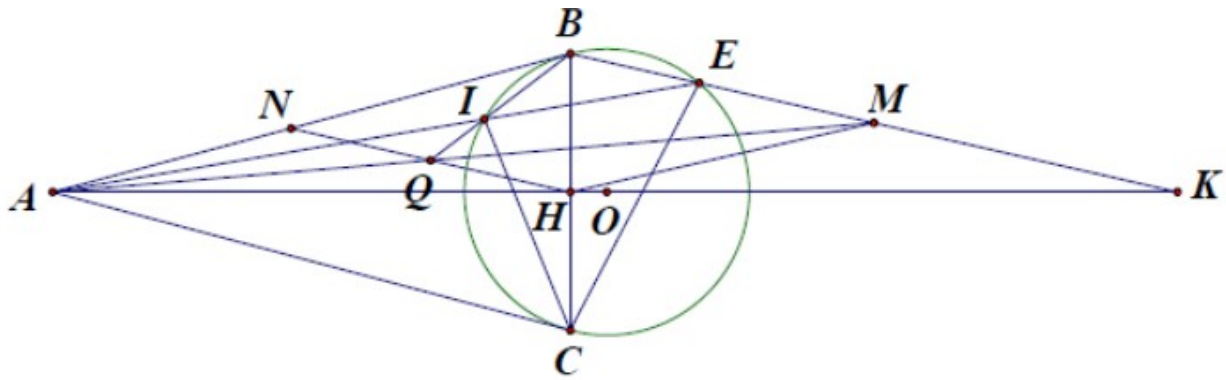
Áp dụng BĐT: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} (x, y > 0) \Rightarrow P \geq \frac{8}{2b} + \frac{12}{2c} + \frac{20}{2a} = 2\left(\frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{5}{a}\right)$

Ta có: $2c + 3b = abc \Rightarrow \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = a.$

$$P \geq 2\left(a + \frac{5}{a}\right) \geq 2 \cdot 2\sqrt{a \cdot \frac{5}{a}} = 4\sqrt{5} \quad (\text{BĐT Cô-si})$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $4\sqrt{5}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{5}$

Câu 4 :



a) Chứng minh rằng $\frac{BI}{CI} = \frac{BE}{CE}$

Xét hai tam giác ABI và tam giác AEB có $\widehat{BAE}$ chung

$$\widehat{ABI} = \widehat{BEI} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{BI}$$

$$\Rightarrow \triangle ABI \sim \triangle AEB (g \cdot g) \Rightarrow \frac{BI}{BE} = \frac{AB}{AE}$$

Tương tự, $\triangle ACI \sim \triangle AEC (g \cdot g) \Rightarrow \frac{CI}{CE} = \frac{AC}{AE}$

Mà $AB = AC$, kết hợp (1), (2) $\Rightarrow \frac{BI}{BE} = \frac{CI}{CE} \Rightarrow \frac{BI}{CI} = \frac{BE}{CE}$ (điều phải chứng minh)

b) Chứng minh rằng HB là đường phân giác của $\widehat{NHM}$

Xét hai $\triangle BQN$ và $\triangle EBI$ có $\widehat{NBQ} = \widehat{BEI}, \widehat{NQB} = \widehat{EBI}$ (so le trong)

$$\Rightarrow \triangle BQN \sim \triangle EBI (g \cdot g) \Rightarrow \frac{BQ}{NQ} = \frac{EB}{IB} \quad (3)$$

Xét $\triangle BHQ$ và $\triangle EIC$ có $\widehat{QBH} = \widehat{ECI} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{IC}$, và $\widehat{ECI} = \widehat{BQH}$ (cùng bù $\widehat{BCE}$)

$$\Rightarrow \triangle BHQ \sim \triangle EIC (g \cdot g) \Rightarrow \frac{QB}{QH} = \frac{EC}{IC}$$

Từ (3), (4) kết hợp $\frac{BI}{BE} = \frac{CI}{CE} \Rightarrow QH = QN \Rightarrow$ Q là trung điểm HN

Xét tam giác ABK có $HN \parallel BK$, và Q là trung điểm HN

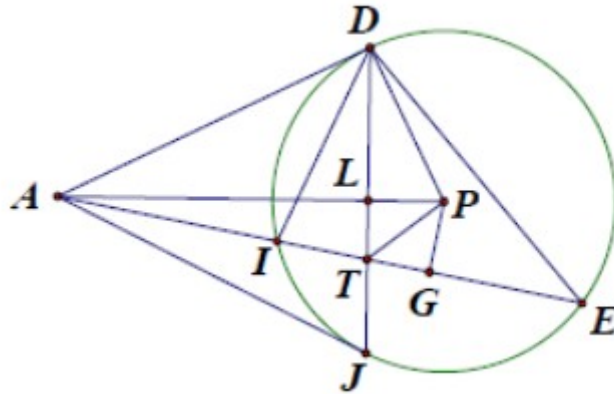
$\Rightarrow$ M là trung điểm BK.

Tam giác BHK vuông tại H có M là trung điểm của BK

$\Rightarrow$ Tam giác BHM cân tại M

$\Rightarrow \angle MBH = \angle MHB$ mà $\angle MBH = \angle NHB \Rightarrow \angle NHB = \angle MHB \Rightarrow$ HB là đường phân giác $\angle NHM$ (điều phải chứng minh)

c) Vẽ đường tròn $(P; R_1)$ thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm I và E. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AD, AJ với đường tròn $(P; R_1)$ (D, J là các tiếp điểm). Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng DJ và AE. Chứng minh đường tròn đường kính TP luôn đi qua 2 điểm cố định.



Gọi G là trung điểm của IE $\Rightarrow$ G là điểm cố định, gọi L là giao điểm của AP và DJ

$\Rightarrow DJ \perp AP$

Tam giác APG đồng dạng với tam giác ATL (g.g) $\Rightarrow AL \cdot AP = AT \cdot AG$

Tam giác ADP vuông tại D có DL là đường cao $\Rightarrow AL \cdot AP = AD^2$

$\triangle ADI$ và $\triangle AED$ có góc A chung, và $\angle ADI = \angle AED$ (cùng chắn cung DI của đường tròn tâm P)

$$\triangle ADI \sim \triangle AED (g \cdot g) \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AI}{AD} \Rightarrow AD^2 = AI \cdot AE \quad \text{không đổi}$$

Do đó $AT \cdot AG$ không đổi, mà AG không đổi nên AT không đổi $\Rightarrow$ điểm T cố định

Vậy đường tròn đường kính TP luôn đi qua 2 điểm cố định là T và G.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong phòng có 121 người, biết mỗi người quen với ít nhất 81 người khác. Chứng minh rằng trong phòng phải có 4 người từng đôi một quen nhau.

Xét A là một người bất kì trong phòng chứa 121 người đó suy ra A quen với ít nhất 81 người khác. Ta mời tất cả các người không quen A ra khỏi phòng thì số người được mời ra nhiều nhất là $120 - 81 = 39$ (người). Khi đó trong phòng còn chỉ A và 81 người quen A, tức là còn lại trong phòng có ít nhất 82 người.

Gọi B là một người khác A là 1 người trong phòng chứa 82 người. Ta mời tất cả những người không quen B ra khỏi phòng suy ra số người trong phòng còn lại ít nhất là $82 - 38 = 43$ (người). Gọi C là một người khác 2 người A và B trong 43 người còn lại. Ta mời tất cả những người không quen C ra khỏi phòng suy ra số người còn lại ít nhất ở trong phòng là $43 - 39 = 4$ (người). Tức là trong phòng có ít nhất 4 người đôi 1 quen nhau.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KỲ THI HSG LỚP 9 THCS CẤP TỈNH
NĂM HỌC: 2024-2025**

Môn: TOÁN

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1:

a) Rút gọn biểu thức
$$P = \frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

b) Cho a, b, c là các số thực sao cho $a + b + c = 2$ và $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Tính giá trị của biểu thức
$$Q = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}.$$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho n là số nguyên dương và $3^{n+1} - n^2$ chia hết cho 2. Chứng minh rằng $3^{n+1} - n^2$ chia hết cho 8.

b) Xác định tất cả các cặp số (a; b) với a, b nguyên dương sao cho phương trình $ax^2 - bx + 2a + 3 = 0$ (với x là ẩn số) có hai nghiệm nguyên dương phân biệt.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Chứng tỏ rằng không tồn tại cặp số nguyên dương (x; y) sao cho $x + 1 = 4y$.

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3abc$. Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq 3 \text{ và } \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{c+1} + \frac{c^2}{a+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; \dots; 20\}$ gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Một tập hợp 4 chỉ chứa các phần tử thuộc X được gọi là “tập tốt” nếu không tồn tại hai phần tử a, b thuộc A sao cho $a < b$ và b chia hết cho a.

a) Hãy tìm một “tập tốt có đúng 10 phần tử.

b) Gọi A là một “tập tốt” bất kỳ có đúng 10 phần tử. Chứng minh rằng với mọi số nhiên m lẻ và $m < 20$, luôn tồn tại a thuộc A sao cho a chia hết cho m.

Câu 5. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O, có đường cao AD và trung tuyến AM. Kẻ đường kính AE, tia EM cắt AD tại H và cắt (O) tại F ($F \neq E$).

a) Chứng minh M là trung điểm EH và $BC^2 = 4ME.MF$.

b) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác FBH.

c) Chứng minh tứ giác AFDM nội tiếp và $\angle BFD = \angle MAC$.

ĐÁP ÁN

Câu 1:

$$P = \frac{2x+1 + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) - (x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

a) Ta có:

$$\text{Hay } P = \frac{2x+1+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{2x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}.$$

$$\text{Vậy } P = \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$\text{b) Do } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1 \quad \text{nên} \quad \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 = 4$$

$$\text{Hay } (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) = 4.$$

$$\text{Mà } a+b+c=2 \text{ suy ra } Q = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} = 2.$$

Câu 2:

a) Do $3^{n+1} - n^2$ chia hết cho 2 nên n là số lẻ

Khi đó $n^2 \equiv 1 \pmod{8}, 3^{n+1} \equiv 1 \pmod{8}$ (do n + 1 là số chẵn)

Vậy $3^{n+1} - n^2$ chia hết cho 8.

$$\text{b) Từ giả thiết suy ra } P = \frac{2a+3}{a} \in \mathbb{Z} \quad \text{hay } a \text{ là ước nguyên dương của } 3.$$

Nếu a = 1 khi đó P = 5 = 1.5 suy ra b = 6.

Nếu a = 3 khi đó P = 3 = 1.3 suy ra b = 12.

Câu 3:

$$\text{a) từ giả thiết suy ra } x^3 = (2y-1)(2y+1)$$

Do $2y-1$ và $2y+1$ là hai số lẻ liên tiếp nên nguyên tố cùng nhau

$$\text{Hay tồn tại } a, b \in \mathbb{N}^* \text{ và } b > a \text{ sao cho } \begin{cases} 2y-1 = a^3 \\ 2y+1 = b^3 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } b^3 - a^3 = 2 \Rightarrow (b-a)(b^2 + ab + a^2) = 2$$

$$\text{Mà } b^2 + ab + a^2 > 3 \text{ nên } b-a \notin \mathbb{N} \text{ vô lí}$$

Hay ta có điều phải chứng minh.

$$\text{b) Ta có: } 3abc = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt{a^2 b^2 c^2} \text{ suy ra } abc \geq 1$$

$$\text{Mà } a+b+c \geq 3\sqrt{abc} \text{ nên } a+b+c \geq 3$$

Ta có: $\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{c+1} + \frac{c^2}{a+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3}$.

Do $a+b+c \geq 3$ nên $\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3} \geq \frac{3(a+b+c)}{a+b+c+3} \geq \frac{3}{2}$

Vậy $\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{c+1} + \frac{c^2}{a+1} \geq \frac{3}{2}$.

Câu 4:

a) Một tập tốt có đúng 10 phần tử là: $\{11; 12; \dots; 20\}$

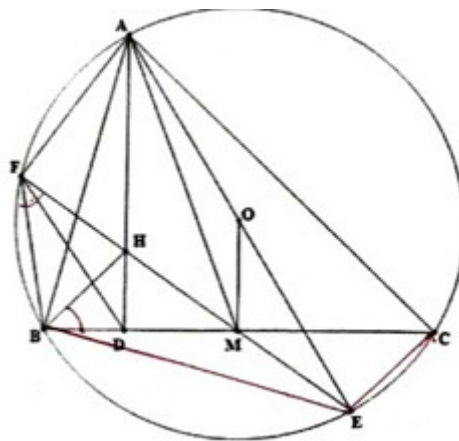
b) Xét a_i với $i = \overline{1, 10}$ là 10 phần tử thuộc A, khi đó a_i luôn biểu diễn dưới dạng $a_i = 2^{s_i} \cdot m_i; s_i \in \mathbb{N}, m_i$ lẻ.

Do $a_i \in X \Rightarrow m_i \in T = \{1; 3; 5; \dots; 19\}$ tập T này có đúng 10 phần tử

Do A là tập tốt nên các số m_i là đôi một khác nhau, tức là với mọi m lẻ và $m < 20$ luôn tồn tại $m_i = m$

Hay a_i chia hết cho m.

Câu 5:



a) ta có: $OM \parallel AH$ mà O là trung điểm AE nên M là trung điểm HE

Mà FBEC nội tiếp nên $ME \cdot MF = MC \cdot MB$

Hay $BC^2 = 4 \cdot ME \cdot MF$

b) Ta có M là trung điểm EH và $ME \cdot MF = MC \cdot MB$

Nên $MB^2 = MH \cdot MF$

Suy ra tam giác MHB đồng dạng với tam giác MBF hay $\angle MBH = \angle MFB$

Vậy BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác FBH

c) Ta có tam giác AFM vuông tại F nên tứ giác AFDM nội tiếp

Suy ra $\angle AFD = \angle AMC$

Mà tứ giác AFBC nội tiếp nên $\angle AFB + \angle ACM = 180^\circ$

Hay $\angle AMC + \angle BFB + \angle ACM = 180^\circ$

Vậy $\angle BFD = \angle MAC$

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NAM**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI CHỌN HSG CẤP TỈNH THCS
NĂM HỌC 2024-2025**

**Môn thi: TOÁN
Thời gian: 150 phút
(không kể thời gian giao đề)
Khóa thi ngày: 12/9/2024**

Câu 1. (4,5 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \frac{2x - 8\sqrt{x} + 3}{x + \sqrt{x} - 6} + \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}$, với $x > 4$

Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các số nguyên x thỏa mãn $A \geq \frac{x - \sqrt{x}}{12}$.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $x^3 + \frac{x^2}{2} + 2xy - 2x + y - 4 = 0$.

Câu 2. (4,5 điểm)

a) Giải phương trình $\frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1} = \sqrt{x+4}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(x+1)(2y+1) + x + 2 = 0 \\ 4xy^2 + 4y^2 + 4xy - x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Đường tròn đường kính AC cắt đoạn thẳng BH tại M. Trên đoạn thẳng HC lấy điểm N sao cho $AM = AN$.

a) Chứng minh $EB \cdot EH = ED \cdot EF$.

b) Chứng minh N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có hai đường cao AE, BD cắt nhau tại H. Đường trung trực của đoạn thẳng DH cắt AE tại M, cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại P và Q (P nằm giữa M và Q).

a) Chứng minh MD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

b) Chứng minh $\angle APM + \angle QM = \angle BCD$

c) Đường thẳng AQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại F (F khác Q).

Chứng minh $\angle APB = \angle FPB$

Câu 5. (4,0 điểm)

a) Cho p là số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên dương b sao cho nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - bx + bp = 0$ là số nguyên.

b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = xy \left(x^2 + y^2 - \frac{1}{z} \right) + yz \left(y^2 + z^2 - \frac{1}{x} \right) + zx \left(z^2 + x^2 - \frac{1}{y} \right).$$

ĐÁP ÁN

Câu 1:

a) Ta có:
$$\frac{2x - 8\sqrt{x} + 3}{x + \sqrt{x} - 6} = \frac{2x - 8\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)}$$
 và

$$\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x} - 1)^2}}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x - 8\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} \\ &= \frac{2x - 8\sqrt{x} + 3 + (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3) - 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{2x - 8\sqrt{x} + 3 + x + 3\sqrt{x} - \sqrt{x} - 3 - 2x + 4\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{x - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} \end{aligned}$$

$$A \geq \frac{x - \sqrt{x}}{12} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} \geq \frac{x - \sqrt{x}}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \geq \frac{\sqrt{x} - 1}{12}$$

$$\Leftrightarrow 12 \geq (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)$$

$$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} - 15 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 5) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 9$$

Kết hợp với $x > 4$ suy ra các số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán là: 5; 6; 7; 8; 9

b) Giả sử tồn tại cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$x^3 + \frac{x^2}{2} + 2xy - 2x + y - 4 = 0. \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 2x^3 + x^2 + 4xy - 4x + 2y - 8 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2(2x+1) + 2y(2x+1) - 2(2x+1) = 6 \\
 &\Leftrightarrow (2x+1)(x^2 + 2y - 2) = 6
 \end{aligned}$$

Suy ra số nguyên $2x + 1$ là ước của 6. Do $2x + 1$ không chia hết cho 2 nên

$$2x+1 \in \{3; -3; 1; -1\}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2x+1=3 \\ x^2+2y-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\text{Loại})$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2x+1=-3 \\ x^2+2y-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ 2y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases} \quad (\text{Thỏa mãn})$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 2x+1=1 \\ x^2+2y-2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 2x+1=-1 \\ x^2+2y-2=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 2y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\text{Loại})$$

Vậy có hai cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán: $(x; y) = (-2; -2); (x; y) = (0; 4)$

Câu 2:

$$\text{a) Điều kiện: } \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Phương trình (1) tương đương với } \frac{(\sqrt{3x+1})^2 - 1^2}{\sqrt{3x+1} + 1} = \sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3x+1} + 1)(\sqrt{3x+1} - 1)}{\sqrt{3x+1} + 1} = \sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - 1 = \sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = \sqrt{x+4} + 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1})^2 = (\sqrt{x+4} + 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = x - 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+4 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x=0 \\ x=5 \end{cases} \end{cases}$$

(Nhận)

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm: $x = 5$.

b) Hệ PT (1) tương đương với

$$\begin{cases} 2(x+1)(2y+1) + (x+1) + 1 = 0 \\ (4xy^2 + 4y^2) + (4xy + 4y) + (x+1) - 2x - 6y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+1)(2y+1) + (x+1) + 1 = 0 \\ 4y^2(x+1) + 4y(x+1) + (x+1) - 2(x+1) - 3(2y+1) - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+1)(2y+1) + (x+1) + 1 = 0 \\ (x+1)(2y+1)^2 - 2(x+1) - 3(2y+1) - 2 = 0 \end{cases}$$

Đặt $a = x + 1$; $b = 2y + 1$ ta có hệ
$$\begin{cases} 2ab + a + 1 = 0 \\ ab^2 - 2a - 3b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab + (a + 1) = 0 \\ ab^2 - 2(a + 1) - 3b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab + a + 1 = 0 \\ ab^2 + 4ab - 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab + a + 1 = 0 \\ \begin{cases} b = 0 \\ ab + 4a - 3 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

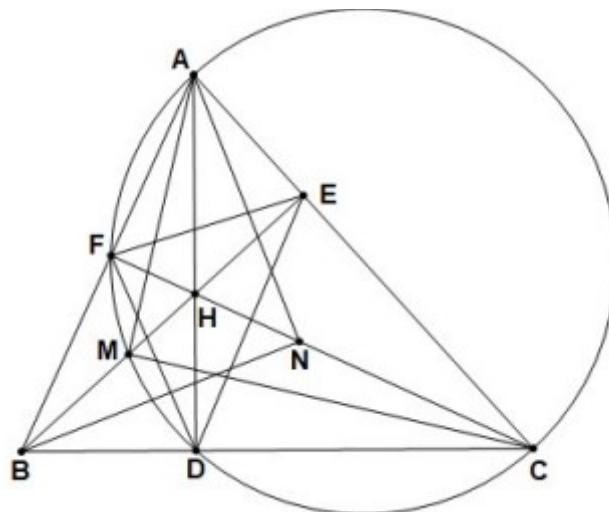
$$\begin{cases} 2ab + a + 1 = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ (Thỏa mãn)}$$

$$\begin{cases} 2ab + a + 1 = 0 \\ ab + 4a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm:

Câu 3:



a) Ta có: $\widehat{BED} = \widehat{BAD}$ (vì tứ giác ABDE nội tiếp)

$$\square FEH = \square BAD \text{ (vì tứ giác AEHF nội tiếp)}$$

Suy ra: $\square_{BED} = \square_{FEH}$ (1)

Ta có: $\square EBD = \square EFH$ (2) (vì tứ giác BCEF nội tiếp)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle EBD$ và $\triangle EFH$ đồng dạng.

$$\text{Do đó: } \frac{EB}{EF} = \frac{ED}{EH} \Leftrightarrow EB.EH = ED.EF$$

b) Ta có: $AN^2 = AM^2 = AE.AC$ (3) (vì $\triangle AMC$ vuông tại M có đường cao ME)

Ta có: $\angle EAF = \angle BAC$

$$\square AEF = \square ABC \text{ (vì tứ giác BCEF nội tiếp)}$$

Suy ra $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ đồng dạng.

$$\text{Do đó: } \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Leftrightarrow AE \cdot AC = AF \cdot AB \quad (4)$$

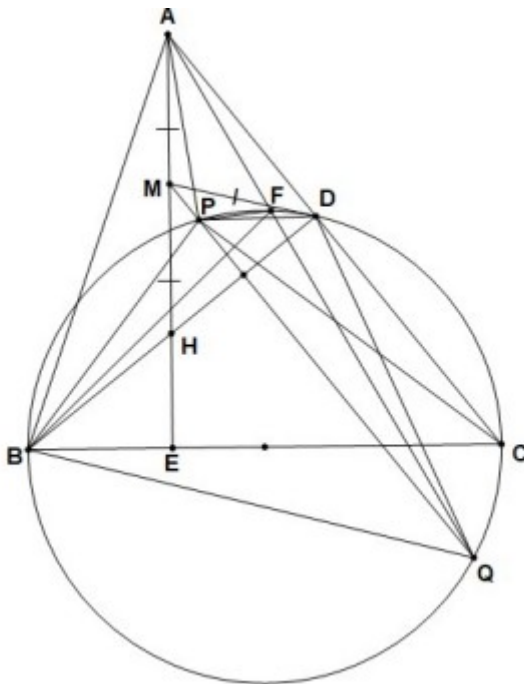
$$AN^2 = AF \cdot AB \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AF}{AN}$$

Từ (3) và (4) suy ra

Lại có $\widehat{NAB} = \widehat{FAN}$ nên $\triangle ABN$ và $\triangle ANF$ đồng dạng, suy ra $\widehat{ANB} = \widehat{AFN} = 90^\circ$

Do đó N thuộc đường tròn đường kính AB, hay N thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$.

Câu 4:



Vì M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng DH và $\triangle ADH$ vuông tại D nên

$$MD = MH = MA = \frac{AH}{2} \Rightarrow \angle MDH = \angle MHD \quad (1)$$

Vì tứ giác CDHE nội tiếp nên $\angle BCD = \angle MHD$ (2)

$$\angle MDH = \angle BCD \Rightarrow \angle MDB = \angle BCD = \frac{1}{2} \text{ số đo } \angle DPB$$

Từ (1) và (2) suy ra

Hơn nữa, cung bị chắn bởi dây DB là $\angle DPB$ nằm bên trong góc $\angle MDB$

Vậy MD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

b) Ta có: $\angle MDP = \angle MQD$ (vì MD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$)

$$\angle DMP = \angle QMD$$

Suy ra $\triangle MPD$ và $\triangle MDQ$ đồng dạng.

$$\text{Do đó: } \frac{MP}{MD} = \frac{MD}{MQ} \quad \text{mà } MD = MA \text{ nên } \frac{MP}{MA} = \frac{MA}{MQ}$$

Ta lại có: $\angle PMA = \angle AMQ$ nên $\triangle PMA$ và $\triangle AMQ$ đồng dạng, suy ra $\angle PAM = \angle AQM$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } \angle APM + \angle AQM &= \angle APM + \angle PAM = \angle HMQ \\ &= 90^\circ - \angle MHD = 90^\circ - \angle EHB = \angle EBD \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \angle APB + \angle AQB &= \angle APM + \angle MPB + \angle AQM + \angle MQB \\ &= (\angle APM + \angle AQM) + \angle MPB + \angle MQB \\ &= \angle EBD + 180^\circ - \angle QPB + \angle PQB \\ &= \angle EBD + 180^\circ - \angle QDB + \angle PCB \\ &= \angle EBD + 180^\circ - (90^\circ - \angle QDC) + (\angle BCD - \angle BCP) \\ &= \angle EBD + 180^\circ - (90^\circ - \angle QP) + (\angle BCD - \angle QP) \\ &= \angle EBD + 90^\circ + \angle BCD \\ &= 180^\circ \end{aligned} \quad (3)$$

Vì tứ giác BPFQ nội tiếp nên $\angle FPB + \angle AQB = 180^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\angle APB = \angle FPB$

Một cách khác chứng minh $\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$ như sau:

Ta có: $\angle BBP = \angle BCP = \angle BQP = \angle DQ = \angle BQ = \angle PQ$ (Vì $PQ \parallel CD$)

$$\angle MPB = \angle PBQ + \angle PQB \quad (\text{vì } \angle MPB \text{ là góc ngoài của tam giác BPQ})$$

$$\angle APM + \angle AQM = \angle BCD \quad (\text{ý b})$$

$$\angle APB + \angle AQB = \angle APM + \angle MPB + \angle AQM + \angle MQB$$

$$= (\angle APM + \angle AQM) + \angle MPB + \angle MQB$$

$$= \angle BCD + \angle PBQ + \angle PQB + \angle PCB$$

$$= \angle BCD + \angle BCD + \angle BBC + \angle BQ + \angle PCB + \angle PCB$$

$$= 2\angle BCD + \angle BCD + 2\angle PCB$$

$$= 2(\angle BCD + \angle PCB)$$

$$= 2(\angle BCD)$$

$$= 2.90^\circ = 180^\circ.$$

Câu 5:

a) Giả sử tồn tại số nguyên dương b để phương trình $x^2 - bx + bp = 0$ có hai nghiệm nguyên x_1, x_2

Ta có: $x_1 + x_2 = b; x_1 x_2 = bp$

Vì $b, p > 0$ nên $x_1 > 0, x_2 > 0$

Vì p là số nguyên tố nguyên tố và $x_1 x_2 = bp$ nên $x_1 \vdots p$, hoặc $x_2 \vdots p$

Giả sử $x_1 \vdots p \Rightarrow x_1 = pc (c \in \mathbb{N}^*)$

$$x_2 = b - x_1 = b - pc$$

$$x_1 x_2 = bp \Leftrightarrow pc(b - pc) = bp \Leftrightarrow c(b - pc) = b \Leftrightarrow b(c - 1) = pc^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow b = \frac{pc^2}{c-1} \quad (2) \quad (\text{vì } c > 1, \text{ vì } c = 1 \text{ không thỏa mãn (1)})$$

Ta có: $(c, c-1) = 1 \Rightarrow (c^2, c-1) = 1$ mà $pc^2 \vdots c-1 \Rightarrow p \vdots c-1$

Do p là số nguyên tố nên $c-1 = 1$ hoặc $c-1 = p$

+) Với $c-1 = 1$ thì $c = 2$ thay vào (2) ta được $b = 4p$.

Thử lại: phương trình $x^2 - 4px + 4p^2 = 0$ có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 2p \in \mathbb{N}^*$

+) Với $c - 1 = p$ thì $c = p + 1$ thay vào (2) ta được $b = c^2 = (p + 1)^2$

Thử lại: phương trình $x^2 - (p + 1)^2 x + p(p + 1)^2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = p + 1 \in \mathbb{N}^*, x_2 = p(p + 1) \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy $b = 4p$ hoặc $b = (p + 1)^2$

b)
$$P = xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2) - \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right).$$

Xét
$$M = xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2):$$

Ta có:
$$(x - y)^4 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 \geq 0 \quad (1)$$

$$xy(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 \geq 0 \quad (2)$$

Cộng vế theo vế (1) và (2), ta được:

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^3y + 4x^2y^2 - 3xy^3 + y^4 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^4 + 4x^2y^2 + y^4 &\geq 3xy(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (3)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

Tương tự:
$$y^4 + 4y^2z^2 + z^4 \geq 3yz(y^2 + z^2) \quad (4)$$

Đẳng thức xảy ra khi $y = z$.

$$z^4 + 4z^2x^2 + x^4 \geq 3zx(z^2 + x^2) \quad (5)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = z$.

Cộng vế theo vế (3), (4) và (5), ta được:

$$\begin{aligned} 2(x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2) &\geq 3[xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2)] \\ \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2)^2 &\geq 3M \\ \Leftrightarrow M &\leq \frac{2 \cdot 3^2}{3} = 6 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Xét
$$N = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}:$$

Ta có:
$$N^2 = \left(\frac{xy}{z} \right)^2 + \left(\frac{yz}{x} \right)^2 + \left(\frac{zx}{y} \right)^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2x^2$$

Ta lại có:
$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 \geq \frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} + \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y} + \frac{zx}{y} \cdot \frac{xy}{z} = y^2 + z^2 + x^2$$

(Áp dụng BĐT: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$)

Suy ra
$$N^2 \geq 3y^2 + 3z^2 + 3x^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3.3 = 9 \Rightarrow N \geq 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi
$$\frac{xy}{z} = \frac{yz}{x} = \frac{zx}{y} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Do đó: $P = M - N \leq 6 - 3 = 3.$

$P = 3$ xảy ra khi $M = 6$ và $N = 3$, hay $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3, đạt được khi $x = y = z = 1$.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÌNH ĐỊNH**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HSG CẤP TỈNH
LỚP 9 THCS
KHÓA NGÀY 18 – 9 – 2024
Môn thi: TOÁN
Thời gian: 150 phút
(Không kể thời gian giao đề)**

Bài 1:

1. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a^{2021} + b^{2021} = a^{2022} + b^{2022} = a^{2023} + b^{2023}.$

Tính tổng $S = a^{2024} + b^{2024}.$

2. Cho phương trình $x^2 - (2m + 5)x + 3m + 4 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các số nguyên m để phương trình có nghiệm nguyên.

Bài 2:

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2\sqrt{y} + x\sqrt{y} - 2 = x^2 + x - 2\sqrt{y} \\ \sqrt{3xy - y^2 - 1} = 2x - y - 1 \end{cases}; (x, y \in \mathbb{R})$$

2. Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b-c)}{c(a+c)} + \frac{b(c-a)}{a(b+a)} + \frac{c(a-b)}{b(c+b)} \geq 0.$$

Bài 3:

Tìm tất cả các nghiệm nguyên x, y của phương trình:

$$3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0.$$

Bài 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , tia phân giác trong AD (D thuộc cạnh BC) cắt đường tròn (O) tại E khác A . Đường tròn đường kính DE cắt lại đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F . Gọi M, N lần lượt là

trung điểm của các cạnh BC, CA. Về các đường cao AK, CL của tam giác ABC, hai đường thẳng KL, MN cắt nhau tại T. Chứng minh rằng:

1. Bốn điểm K, T, C, N cùng thuộc một đường tròn và $\angle TAB = \angle MAC$.
2. Ba điểm A, T, F thẳng hàng.

Bài 5. (1,5 điểm)

Người ta viết lên bảng dãy số $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2024}$. Mỗi lần xóa đi hai số bất kì x, y trên bảng và viết thêm số x + y + xy. Sau một số lần thực hiện như vậy thì trên bảng còn lại một số.

Tim số còn lại đó.

ĐÁP SỐ

Bài 1:

1. Với a, b > 0

Đặt $a^{2021} + b^{2021} = a^{2022} + b^{2022} = a^{2023} + b^{2023} = x$. Ta có x > 0

$$\text{Và } (a^{2022} + b^{2022})(a + b) = (a^{2021} + b^{2021}) + ab(a^{2021} + b^{2021})$$

$$\Rightarrow x(a + b) = x + abx$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Do x > 0 nên a + b = 1 + ab

Với a = 1 thay vào (I) thì $1^{2021} + b^{2021} = 1^{2022} + b^{2022} = 1^{2023} + b^{2023}$

$$\Rightarrow b^{2021} = b^{2022} = b^{2023} \text{ nên } \begin{cases} b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \text{ mà } b > 0 \text{ nên } b = 1.$$

Tương tự với b = 1 thì a = 1.

Tóm lại a = b = 1.

Với a = b = 1 thì $S = a^{2024} + b^{2024} = 1^{2024} + 1^{2024} = 2$

2. Trước hết $\Delta = (2m + 5)^2 - 4(3m + 4) = 4(m + 1)^2 + 5 > 0, \forall m$.

Do đó phương trình luôn có nghiệm với mọi m

Giả sử tồn tại m = a (a thuộc Z) sao cho phương trình có nghiệm x = b (b thuộc Z)

Khi đó: $b^2 - (2a + 5)b + 3a + 4 = 0 \Leftrightarrow b^2 - 2ab - 5b + 3a + 4 = 0$

$$\Rightarrow a = \frac{b^2 - 5b + 4}{2b - 3}$$

Mà b thuộc Z nên

$$\Rightarrow 4a = 2b - 7 - \frac{5}{2b - 3}$$

Do a thuộc Z nên $4a$ thuộc Z

Khi đó $2b - 3 \in U(5)$

$2b - 3$	-5	-1	1	5
b	-1	1	2	4
$4a$	-8	0	-8	0
a	-2	0	-2	0

Vậy các cặp số (a, b) cần tìm là $(-2; -1)$, $(0, 1)$, và $(-2, 2)$, $(0; 4)$

Tóm lại các số nguyên m cần tìm để phương trình có nghiệm nguyên là $m = -2, m = 0$.

Bài 2:

1. Với $x, y \in R$ hệ phương trình đã cho
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + x + 2)(\sqrt{y} - 1) = 0 \\ \sqrt{3xy - y^2 - 1} = 2x - y - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} - 1 = 0 \\ \sqrt{3xy - y^2 - 1} = 2x - y - 1 \end{cases}$$

(Do $4(x^2 + x + 2) = (2x + 1)^2 + 7 > 0; \forall x$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \sqrt{3x - 2} = 2x - 2 \end{cases} (I)$$

$$\sqrt{3x - 2} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x - 2 = 4x^2 - 8x + 4 \end{cases}$$

Xét phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2 - 11x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 2 \text{ (thỏa mãn); } x = \frac{3}{4} \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Tóm lại hệ có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (2; 1)$

2. Với $a, b, c > 0$ ta có $\frac{a(b-c)}{c(a+c)} + \frac{b(c-a)}{a(b+a)} + \frac{c(a-b)}{b(c+b)} \geq 0$ trở thành

$$a^2b(a+b)(b^2-c^2) + b^2c(b+c)(c^2-a^2) + c^2a(c+a)(a^2-b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 - (a^3bc^2 + b^3ca^2 + c^3ab^2) - 3a^2b^2c^2 \geq 0 (*)$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$a^3b^3 + a^3b^3 + b^3c^3 = b^3(a^3 + a^3 + c^3) \geq b^3 \cdot 3\sqrt{a^3 \cdot a^3 \cdot c^3} = 3a^2b^3c(1)$$

Chứng minh tương tự, ta có $b^3c^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq 3ab^3c^3$ (2)

Và $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq 3a^3bc^2$ (3)

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta có:

$$\begin{aligned} & a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq a^3bc^2 + b^3ca^2 + c^3ab^2 \\ \Rightarrow & a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 - (a^3bc^2 + b^3ca^2 + c^3ab^2) \geq 0(I) \end{aligned}$$

Mặt khác, ta cũng có:

$$\begin{aligned} & a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 \geq 3\sqrt{a^2b^4b^2c^4c^2a^4} = 3a^2b^2c^2 \\ \Rightarrow & a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 \geq 3a^2b^2c^2 \\ \Rightarrow & a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 - 3a^2b^2c^2 \geq 0 \text{ (II)} \end{aligned}$$

Cộng vế với vế của (I) với (II) ta được:

$$\Leftrightarrow a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 - (a^3bc^2 + b^3ca^2 + c^3ab^2) - 3a^2b^2c^2 \geq 0$$

Vậy (*) luôn đúng

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^3b^3 = b^3c^3 = c^3a^3 \\ a^2b^4 = b^2c^4 = c^2a^4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$

Bài 3:

Với $x, y \in \mathbb{Z}$ ta có $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & 4x^2 - [(x+y)^2 + 2(x+y) + 1] = -9 \\ \Leftrightarrow & 4x^2 - (x+y+1)^2 = -9 \\ \Leftrightarrow & (-x+y+1)(3x+y+1) = 9(t) \end{aligned}$$

Xét các trường hợp:

1) $\begin{cases} -x+y+1=9 \\ 3x+y+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -x+y+1=-9 \\ 3x+y+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -x+y+1=3 \\ 3x+y+1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} -x+y+1=-3 \\ 3x+y+1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} -x+y+1=-1 \\ 3x+y+1=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$

$$6) \begin{cases} -x + y + 1 = 1 \\ 3x + y + 1 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là: $\{(-2; 6), (2; -8), (0; 2), (0; -4), (-2; -4), (2; 2)\}$

Bài 4:



1. Do $AK \perp BC, CL \perp AB$ (do AK, CL là đường cao của tam giác ABC)

Nên $\angle ALC = \angle AKC = 90^\circ$

Do đó ALKC là tứ giác nội tiếp

Do đó $\angle BLT = \angle ACK$ (do cùng bù với $\angle ALK$)

Hay $\angle BLT = \angle NCK$ (1)

Do M, N là trung điểm của BC, CA nên MN là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow MN \parallel AB$

Do đó $\angle BLT = \angle NTK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle KTN = \angle NCK$ (3) nên KNCT là tứ giác nội tiếp

Vì NL là trung tuyến của tam giác vuông ALC nên $LN = NC = NA$

Vì $MN \parallel AB$; $AB \perp CL \Rightarrow MN \perp CL$

Xét tam giác NCL có MN là đường cao nên MN cũng là đường trung trực

$\Rightarrow \angle MLN = \angle NCK$

Kết hợp (3) ta được $\angle MLN = \angle NTK$

Do đó: $\triangle MNL \sim \triangle LNT (g.g)$

Do đó: $\frac{MN}{LN} = \frac{LN}{NT}$ mà $LN = NA$ nên $\frac{MN}{NA} = \frac{NA}{NT}$

Kết hợp $\widehat{AMN} = \widehat{AMT}$

Do đó $\Delta MNA \sim \Delta ANT (c.g.c)$

$$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{NTA} (4)$$

Mặt khác $\widehat{PAB} = \widehat{NTA} (5)$ do $MN \parallel AB$

Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{PAB} = \widehat{MAC}$

2. theo câu 1) $\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$

$$\text{Do đó } \widehat{BE} = \widehat{CE} \Rightarrow BE = CE$$

Nên O, M, E thẳng hàng (cùng thuộc trung trực của BC)

Kẻ đường kính EU của đường tròn (O)

Gọi V là tâm của đường tròn đường kính DE

$$\text{Ta có: } \widehat{DFE} = 90^\circ$$

$$\text{Và } \widehat{UFE} = 90^\circ \Rightarrow DF \perp FE; UF \perp FE \Rightarrow U, D, F \text{ thẳng hàng}$$

$$\text{Xét đường tròn (O) có } \widehat{PAE} = \widehat{PUE} \quad (6)$$

$$\text{Ta có: } \widehat{DAU} = 90^\circ, \widehat{DMU} = 90^\circ \text{ do đó tứ giác AUDM nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{MUD} = \widehat{MAD} \quad (7)$$

$$\text{Theo câu 1) } \widehat{BAT} = \widehat{MAC} \text{ mà } \widehat{BAE} = \widehat{EAC} \Rightarrow \widehat{EAT} = \widehat{MAD} \quad (8)$$

$$\text{Từ (6), (7), (8) ta được } \widehat{PAE} = \widehat{PAE}$$

Lại thuộc cùng nửa mặt phẳng bờ AE nên FA trùng FT

Do đó ba điểm A, T, F thẳng hàng.

Bài 5:

$$\text{Xét dãy số: } \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n}$$

$$\text{Ta thấy: } \left(\frac{1}{1} + 1\right) \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{3} + 1\right) \left(\frac{1}{4} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{n-1} + 1\right) \left(\frac{1}{n} + 1\right)$$

$$= \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= n + 1$$

Đặt
$$S_n = \left(\frac{1}{1} + 1\right) \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{3} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{n-1} + 1\right) \left(\frac{1}{n} + 1\right)$$

**ỦY BAN NHÂN DÂN TỈNH BÌNH
PHƯỚC
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**KỲ THI CHỌN HSG CẤP TỈNH CẤP
THCS THEO CHƯƠNG TRÌNH GDPT
NĂM 2018**

Năm học 2024-2025

MÔN THI: TOÁN HỌC

Thời gian làm bài: 150' *không kể thời gian phát
đề*

Ngày thi: 22/10/2024

Câu 1. (5.0 Điểm)

1. Cho biểu thức:
$$A = \frac{x+24}{x-\sqrt{x}-2} : \left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right]$$

a) Tìm điều kiện xác định của x để biểu thức A có nghĩa và rút gọn biểu thức A .

b) Tìm giá trị của x để biểu thức A là một số tự nhiên.

c) Tìm giá trị của x để biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Cho đa thức $N = x^3 + 4x^2 - 23x + 1$. Hãy tính giá trị của đa thức N^{2025} khi giá trị của $x = 3\sqrt{3} - 2$.

3. Cho ba số thực a, b, c . Hãy chứng minh bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$.

Câu 2. (5.0 Điểm)

1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3(x-1)} - \sqrt{3+x} = 2$

b) $\sqrt{x^2 + 3x + 11} - \sqrt{x-2} = 2x - 2$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17 \end{cases}$$

3. Nhân dịp ngày 20 tháng 10 năm 2024 là ngày lễ kỷ niệm Ngày Phụ nữ Việt Nam, các bạn nam trong lớp 9A1 đã góp tiền với nhau mua tặng các bạn nữ và cô giáo viên chủ nhiệm mỗi người một túi hoa hồng tri ân trị giá 20 000 nghìn. Sau đó thống kê lại thì số tiền mua hoa là 360 000 nghìn tất cả (*Tất cả các bạn nam đều góp tiền*). Tính số lớp 9A1.

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi các điểm A và B lần lượt là tọa độ giao điểm của đường thẳng $(d): y = x - 2$ với trục hoành và trục tung. Tính diện tích tam giác OAB .

Câu 3. (5.0 Điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB , dây cung CD vuông góc với AB tại H . Gọi M là điểm trên đường thẳng CD và M nằm ngoài đường tròn, AM cắt đường tròn tại điểm N .

Chứng minh rằng:

- $AM \cdot AN = AH \cdot AB$.
- $\square AMC \sim \square ACN$.
- Khi M thay đổi trên CD thì tích $AM \cdot AN$ không đổi. Tính tích đó khi H là trung điểm của OB .

Câu 4. (2.0 Điểm)

4.1. Thả 10 chiếc đinh không thấm nước có kích thước như hình dưới đây vào một cốc thủy tinh có chứa nước. Đinh chìm hẳn xuống nước và nước trong cốc không bị tràn ra ngoài. Hỏi thể tích nước trong cốc tăng thêm bao nhiêu ml?



4.2. Nhóm học sinh tình nguyện khối 9 của một trường trung học cơ sở có 5 bạn. Trong đó có 2 bạn nam là: Quý;Việt và 3 bạn nữ là: An;Châu;Hương. Chọn ngẫu nhiên ba bạn trong nhóm đó để tham gia hoạt động tình nguyện của trường:

- Liệt kê các kết quả có thể xảy ra của phép thử trên. Có tất cả bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?
- Gọi x là xác suất của biến cố A: “3 bạn được chọn ra không qua hai bạn nữ”. Gọi y là xác suất của biến cố B: “3 bạn được chọn ra có cả nam và nữ”. So sánh x và y .

Câu 5. (3.0 Điểm)

5.1. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy$.

5.2. Cho các số x, a, y là các số nguyên. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$A = (x - ay)^2 + 6(x - ay) + x^2 + 16y^2 - 8xy + 2x - 8y + 10$$

--- HẾT ---

Giám thị không giải thích gì thêm!

Và thí sinh không được sử dụng tài liệu (mọi hình thức) và sử dụng máy tính bỏ túi.

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh: