

CÁC DẠNG BÀI TẬP ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ

Phương pháp: Có hai bài toán trong dạng này

Bài toán 1: Bài toán chuyển động của một vật

Một vật chuyển động theo phương trình vận tốc $v(t)$ trong khoảng thời gian $t = a$ đến $t = b$ ($a < b$) sẽ di

$$s = \int_a^b v(t) dt$$

chuyển được quãng đường là:

Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau khoảng thời gian $\Delta t = t_2 - t_1$

là:
$$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

Bài toán 2: Bài toán ứng dụng tích phân vào tìm các đại lượng vật lý như công, điện lượng,...

Theo định luật Hooke thì lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiên là $f(x) = kx$, với k (N/m) là độ cứng của lò xo.

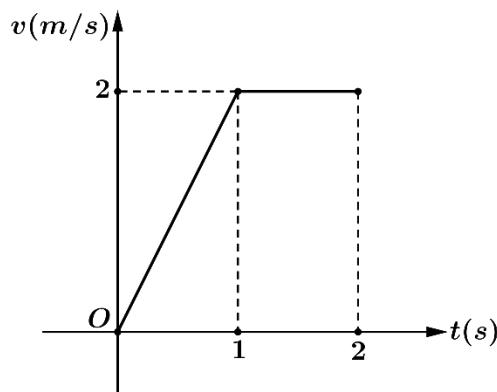
$$A = \int_{l_1}^{l_2} f(x) dx$$

Công cần để kéo dẫn lò xo từ độ dài l_1 đến độ dài l_2 là:

Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ t_1 đến t_2 là:
$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở hình vẽ dưới đây:



- Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 1 giây đầu tiên.
- Tính quãng đường và vật di chuyển được trong 2 giây đầu tiên.

Lời giải

a) Dựa vào đồ thị trong khoảng thời gian 1 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t) = 2t$ (m/s)

$$s = \int_0^1 2t dt = t^2 \Big|_0^1 = 1(m)$$

Ta có quãng đường mà vật di chuyển được trong 1 giây đầu tiên là

b) Dựa vào đồ thị ta thấy: Trong khoảng thời gian 1 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t) = 2t \text{ (m/s)}$, khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t) = 2 \text{ (m/s)}$,

Ta có quãng đường mà vật di chuyển được trong 2 giây đầu tiên là:

$$s = \int_0^1 2t dt + \int_1^2 2 dt = t^2 \Big|_0^1 + 2t \Big|_1^2 = 3(m)$$

Bài tập 2: a) Cho một vật chuyển động với vận tốc $y = v(t) \text{ (m/s)}$. Cho $0 < a < b$ và hàm vận tốc

$v(t) > 0$ với mọi $t \in [a; b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b v(t) dt$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b (tính theo giây).

b) Áp dụng công thức ở câu a) để giải bài toán sau đây: Một vật chuyển động với vận tốc được biểu thị bởi phương trình $v(t) = 2 - \sin t \text{ (m/s)}$. Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0 \text{ (s)}$ đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4} \text{ (s)}$.

Lời giải

a) Ta đã biết $v(t) = s'(t)$ nên $s(t) = \int_a^b v(t) dt$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b .

b) Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0 \text{ (s)}$ đến thời điểm

$$t = \frac{3\pi}{4} \text{ (s)} \quad \text{là:} \quad s(t) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} v(t) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (2 - \sin t) dt = (2t + \cos t) \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = 6\pi - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \approx 3,005(m)$$

Bài tập 3: Ở nhiệt độ 37°C , một phản ứng hóa học từ chất A, chuyển hóa thành sản phẩm chất B theo phương trình: $A \rightarrow B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời gian x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$ thỏa mãn hệ thức $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4} y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng $x = 0$ thì nồng độ (đầu) của chất A là $0,05 \text{ mol } L^{-1}$

a) Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$. Hãy tính $f'(x)$ từ đó tìm hàm số $f(x)$.

b) Giả sử ta tính nồng độ trung bình chất A (đơn vị mol L^{-1}) từ thời điểm a (giây) đến thời điểm b (giây) với $0 < a < b$ theo công thức $\frac{1}{b-a} \int_a^b y(x) dx$. Xác định nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây.

Lời giải

$$f(x) = \ln y(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = -7 \cdot 10^{-4} \Rightarrow f(x) = -7 \cdot 10^{-4} x$$

a) Ta có

$$b) f(x) = -7 \cdot 10^{-4} x \Rightarrow \ln y(x) = -7 \cdot 10^{-4} x \Leftrightarrow y(x) = e^{-7 \cdot 10^{-4} x}$$

Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây là:

$$\frac{1}{30-15} \int_{15}^{30} y(x) dx = \frac{1}{15} \int_{15}^{30} e^{-7 \cdot 10^{-4} x} dx = \frac{1}{15} \frac{e^{-7 \cdot 10^{-4} x}}{-7 \cdot 10^{-4}} \Big|_{15}^{30} = 0,98 (L^{-1})$$

Bài tập 4: a) Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $y = I(t) (A)$. Cho $0 < a < b$ và $I(t) > 0$ với mọi $t \in [a; b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b I(t) dt$ biểu thị điện lượng (C) đã phóng qua cuộn dây trong khoảng thời gian từ a đến b (tính theo giây).

b) Áp dụng công thức ở câu a) để giải bài toán sau: Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $I = 2 \sin(t) (A)$. Tính điện lượng (C) phóng ra trong cuộn dây khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0 (s)$ đến thời điểm $t = \frac{\pi}{2} (s)$.

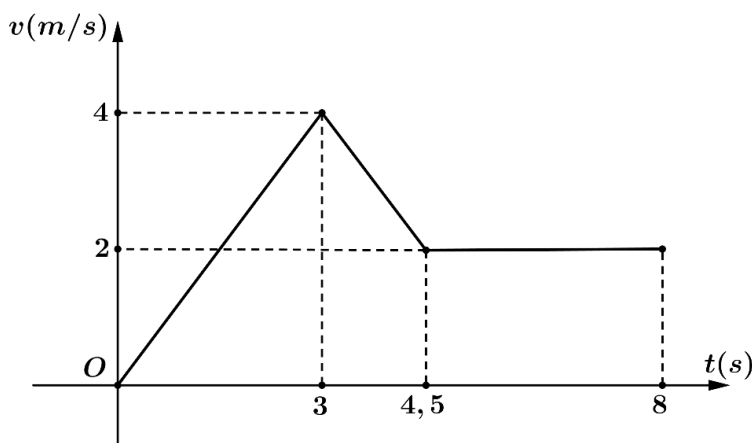
Lời giải

a) Ta đã biết $I(t) = Q'(t)$ nên $Q(t) = \int_a^b I(t) dt$ biểu thị điện lượng đã phóng qua cuộn dây trong khoảng thời gian từ a đến b (a, b tính theo giây).

b) Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0 (s)$ đến thời điểm:

$$t = \frac{\pi}{2} (s) \text{ là } Q(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin(t) dt = -\frac{2}{1} \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = -2(0 - 1) = 2 (C)$$

Bài tập 5: Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở hình vẽ:



a) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giây đầu tiên.

b) Tính quãng đường và vật di chuyển được trong 8 giây đầu tiên.

a) Dựa vào đồ thị trong khoảng thời gian 3 giây vận tốc của chuyển động được xác định là

$$v(t) = \frac{4}{3}t \text{ (m/s)}$$

$$s = \int_0^3 \frac{4}{3}t dt = \frac{4}{3}t^2 \Big|_0^3 = 12 \text{ (m)}$$

Ta có quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là

b) Dựa vào đồ thị ta thấy trong khoảng thời gian 1 giây vận tốc của chuyển động được xác định

là $v(t) = \frac{4}{3}t \text{ (m/s)}$, khoảng thời gian từ 3 giây đến 4,5 giây vận tốc của chuyển động được xác

định là $v(t) = -\frac{4}{3}t + 8 \text{ (m/s)}$, khoảng thời gian từ 4,5 giây đến 8 giây vận tốc của chuyển động

là $v(t) = 8 \text{ (m/s)}$

Ta có quãng đường mà vật di chuyển được trong 8 giây đầu tiên là:

$$s = \int_0^3 \frac{4}{3}t dt + \int_3^{4,5} \left(-\frac{4}{3}t + 8\right) dt + \int_{4,5}^8 8 dt = 38,5 \text{ (m)}$$

Bài tập 6: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trong thành phố thì các xe khi dừng lại phải cách nhau một khoảng tối thiểu là 1m. Một xe máy di chuyển trên đường thì gặp đèn đỏ từ xa, người điều khiển xe máy đạp phanh và xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 10 - 5t \text{ (m/s)}$. Hỏi để giữ khoảng cách an toàn, người điều khiển xe máy phải bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng bao xa, biết rằng ngay lúc đạp phanh thì xe phía trước đang đứng yên?

Lời giải

Kể từ lúc đạp phanh ($t = 0$) đến lúc xe dừng lại thì xe đi được một quãng đường là s . Vì khoảng cách an toàn giữa 2 xe khi dừng lại tối thiểu là 1m nên người điều khiển xe máy phải bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng $s + 1 \text{ (m)}$.

Tại thời điểm $t = 0$ thì xe bắt đầu phanh, và xe dừng lại khi vận tốc bằng 0, khi đó:

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow 10 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Trong khoảng thời gian từ $t = 0 \text{ s}$ đến $t = 2 \text{ s}$ thì xe chạy thêm được quãng đường

$$s = \int_0^2 (10 - 5t) dt = 10 \text{ (m)}$$

Vậy xe nên bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng 11m để giữ khoảng cách an toàn.

Bài tập 7: Giả sử rằng sau t năm, vốn đầu tư của một doanh nghiệp phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P'(t) = 126 + t^2$ (triệu đồng/năm). Hỏi sau 10 năm đầu tiên thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận là bao nhiêu (đơn vị triệu đồng)?

Lời giải

Gọi $P(t)$ là lợi nhuận phát sinh của vốn sau t năm đầu tư. Ta có $P'(t)$ là nguyên hàm của hàm tốc độ $P'(t)$.

Lợi nhuận phát sinh sau 10 năm đầu tiên là: $\int_0^{10} P'(t) dt = \int_0^{10} (126 + t^2) dt = \frac{4780}{3}$ (triệu đồng).

Bài tập 8: Việc thở là những vòng tuần hoàn, mỗi vòng tính từ lúc bắt đầu hít vào đến lúc kết thúc thở ra, thường kéo dài trong 5s. Vận tốc cực đại của khí là V (l/s) nên vì thế nó được mô hình hoá bởi công thức $v(t) = V \sin \frac{3\pi t}{5}$. Tính thể tích khí hít vào phổi sau thời gian 2s.

Lời giải

Vận tốc của khí hít vào được mô hình bởi công thức $v(t) = V \sin \frac{3\pi t}{5}$.

Suy ra lượng khí hít vào sau 2 giây là:

$$N(2) = \int_0^2 v(x) dx = \int_0^2 V \sin \frac{3\pi t}{5} dt = \frac{5V}{3\pi} \left(1 - \cos \frac{3\pi \cdot 2}{5} \right) = 1,06V \quad (\text{lít})$$

Bài tập 9: Một mạch kín gồm một nguồn điện có suất điện động biến thiên theo thời gian được biểu diễn bởi $e = 10 \cos(100\pi t)$ (V) và điện trở trong không đáng kể, nối với mạch ngoài có một điện trở $R = 50\Omega$.

Tính điện lượng chuyển qua điện trở trong thời gian từ $t = 0$ đến $t = \frac{1}{600}$ s?

Lời giải

Ta có $i = \frac{u}{R} = 0,02 \cos(100\pi t)$ (Ampe) và $i(t) = q'(t)$

Do đó $q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt$ nên ta điện lượng từ $t = 0$ đến $t = \frac{1}{600}$ s

$$q = 0,02 \int_0^{\frac{1}{600}} \cos(100\pi t) dt = 3,18 \cdot 10^{-5} C$$

Khi đó

Bài tập 10: Một người đi xe mô tô với độ tăng vận tốc tại một thời điểm t (tính theo giây, $t \geq 0$) được cho

bởi hàm số $f(t) = \frac{1}{300}t^2 + \frac{1}{1350}t$ (km/s²). Nếu bắt đầu tăng tốc tính từ lúc khởi động máy (vận tốc bằng 0km/h), hỏi mất bao lâu thì người đó đạt đến tốc độ 120 km/h?

Lời giải

Gọi x là thời gian cần thiết để người đó đạt đến tốc độ 120 (km/h).

Ta nhận xét độ tăng vận tốc trong thời gian này cũng chính là tích phân của hàm $f(t)$ với $t = 0$ đến $t = x$.

Như vậy ta xét phương trình sau :

$$\int_0^x \left(\frac{1}{300}t^2 + \frac{1}{1350}t \right) dt = \frac{120}{3600} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{900}t^3 + \frac{1}{2700}t^2 \right) \Big|_0^x = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{1}{900}x^3 + \frac{1}{2700}x^2 = \frac{1}{30} \Leftrightarrow x = 3(s)$$

Vậy sau 3s thì người đó đạt đến tốc độ 120 km/h.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Vận tốc của một vật chuyển động là $v(t) = 3t^2 + 5$ (m/s). Quãng đường vật đó đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

- A. 669 m. B. 696 m. C. 699 m. D. 966 m.

Lời giải

$$S = \int_4^{10} (3t^2 + 5) dt = 966 \text{ m.}$$

Quãng đường vật đó đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

Câu 2: Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0004x + 9,3$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm. Khi đó sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm là

- A. 232,325 triệu đồng. B. 230,315 triệu đồng.
C. 321,385 triệu đồng D. 231,375 triệu đồng.

Lời giải

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm là

$$\begin{aligned} P(125) - P(100) &= \int_{100}^{125} P'(x) dx = \int_{100}^{125} (-0,0004x + 9,3) dx = - \int_{100}^{125} 0,0004x dx + \int_{100}^{125} 9,3 dx \\ &= -0,0002x^2 \Big|_{100}^{125} + 9,3x \Big|_{100}^{125} = -0,0002(125^2 - 100^2) + 9,3(125 - 100) = 231,375 \text{ (triệu đồng).} \end{aligned}$$

Câu 3: Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính $R = 9$, có thể được mô hình hóa bởi công thức $v = k(R^2 - r^2)$, trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \leq r \leq R$.

- A. $54k$. B. $45k$. C. $9k$. D. $27k$.

Lời giải

Vận tốc trung bình của động mạch là:

$$\begin{aligned} v_{tb} &= \frac{1}{R-0} \int_0^R v(r) dr = \frac{1}{R} \int_0^R k(R^2 - r^2) dr = \frac{1}{R} \int_0^R (kR^2 - kr^2) dr = \frac{1}{R} \left(kR^2 r - \frac{1}{3} kr^3 \right) \Big|_0^R \\ &= \frac{1}{R} \left(kR^3 - \frac{1}{3} kR^3 \right) = \frac{2kR^2}{3} = \frac{2k \cdot 9^2}{3} = 54k \end{aligned}$$

Câu 4: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.



- A. 55m . B. 25m . C. 50m . D. 16m .

Lời giải

Ta có $-2t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \Rightarrow$ Thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây. Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc $10m/s$ và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$.

$$S = 3 \cdot 10 + \int_0^5 (-2t + 10) dt = 30 + 25 = 55m$$

Khi đó quãng đường ô tô di chuyển là

Câu 5: Một ô tô đang chạy với tốc độ $20(m/s)$ thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?



- A. 20 m . B. 30 m . C. 10 m . D. 40 m .

Lời giải

Khi ô tô dừng hẳn thì: $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 4(s)$.

$$s = \int_0^4 (-5t + 20) dt = 40(m)$$

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được:

Câu 6: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng

cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. $21(m/s)$ B. $25(m/s)$ C. $36(m/s)$ D. $30(m/s)$

Lời giải

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \int a dt = at + C$ mà $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau.

$$\text{Do đó: } \int_0^{18} \left(\frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45} \right) dt = \int_0^{15} at dt \Leftrightarrow 225 = a \cdot \frac{225}{2} \Leftrightarrow a = 2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t) = 2 \cdot 15 = 30(m/s)$.

Câu 7: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi

quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. $15(m/s)$ B. $20(m/s)$ C. $16(m/s)$ D. $13(m/s)$

Lời giải

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là $S = \int_0^{15} \left(\frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t \right) dt = 96(m)$.

Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t) = \int a dt = at + C$.

Tại thời điểm $t = 3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3) = 0 \Leftrightarrow C = -3a$.

Mặt khác quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là:

$$S_2 = \int_3^{15} (at - 3a) dt = \left(\frac{at^2}{2} - 3at \right) \Big|_3^{15} = 72a(m)$$

Vậy $72a = 96 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}(m/s^2)$.

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15) = 16(m/s)$.

Câu 8: Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 , sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng

ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a(m/s), (t \geq 6)$ cho

đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì ô tô đi được quãng đường là 80m. Tìm v_0 .



A. $v_0 = 35 \text{ m/s}$

B. $v_0 = 25 \text{ m/s}$

C. $v_0 = 10 \text{ m/s}$

D. $v_0 = 20 \text{ m/s}$

Lời giải

Tại thời điểm $t = 6$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên có $v(6) = v_0$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \cdot 6 + a = v_0 \Leftrightarrow a = v_0 + 15 \quad \text{suy ra} \quad v(t) = -\frac{5}{2}t + v_0 + 15$$

Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn vậy ta có $v(k) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5} \cdot (v_0 + 15) \Leftrightarrow k = \frac{2v_0}{5} + 6$

$$\text{Tổng quãng đường vật đi được là} \quad 80 = 6 \cdot v_0 + \int_6^k \left(-\frac{5}{2}t + v_0 + 15 \right) dt$$

$$\Leftrightarrow 80 = 6 \cdot v_0 + \left(-\frac{5}{4}t^2 + v_0 \cdot t + 15t \right) \Big|_6^k \Leftrightarrow 80 = 6 \cdot v_0 - \frac{5}{4}(k^2 - 6^2) + v_0 \cdot (k - 6) + 15(k - 6)$$

$$\Leftrightarrow 80 = 6 \cdot v_0 - \frac{5}{4} \left(\frac{4(v_0)^2}{25} + \frac{24v_0}{5} \right) + v_0 \cdot \frac{2v_0}{5} + 15 \cdot \frac{2v_0}{5}$$

$$\Leftrightarrow (v_0)^2 + 36v_0 - 400 = 0 \Leftrightarrow v_0 = 10$$

Câu 9: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1m . Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33.

B. 12.

C. 31.

D. 32.

Lời giải

Ta có: $v_A(0) = 16\text{m/s}$

Khi xe A dừng hẳn: $v_A(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4\text{s}$

$$\text{Quãng đường từ lúc xe } A \text{ hãm phanh đến lúc dừng hẳn là} \quad s = \int_0^4 (16 - 4t) dt = 32\text{m}$$

Do các xe phải cách nhau tối thiểu 1m để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là 33m .

- Câu 10:** Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15 \text{ m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.
- A. 70,25 m B. 68,25 m C. 67,25 m D. 69,75 m

Lời giải

$$a(t) = t^2 + 4t \Rightarrow v(t) = \int a(t) dt = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$v(0) = C = 15 \Rightarrow v(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15 \quad \text{nên} \quad S = \int_0^3 \left(\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15 \right) dt = 69,75 \text{ m}$$

Mà

- Câu 11:** Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.
- A. 136m B. 126m C. 276m D. 216m

Lời giải

Ta có $v(0) = 10 \text{ m/s}$ và $v(t) = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t (t^2 + 3t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_0^t = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2$

Quãng đường vật đi được là $S = \int_0^6 v(t) dt = \int_0^6 \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right) dt = \left(\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3 \right) \Big|_0^6 = 216 \text{ m}$

- Câu 12:** Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t \text{ (m/s)}$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200 (m/s) thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là
- A. $\frac{2500}{3} \text{ (m)}$ B. 2000 (m) C. 500 (m) D. $\frac{4000}{3} \text{ (m)}$

Lời giải

Thời điểm máy bay đạt vận tốc 200 (m/s) là

$$v(t) = 200 \Leftrightarrow t^2 + 10t = 200 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = -20 \end{cases} \Leftrightarrow t = 10$$

Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là:

$$s = \int_0^{10} (t^2 + 10t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + 5t^2 \right) \Big|_0^{10} = \frac{2500}{3} \text{ (m)}$$

Câu 13: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t \text{ (m/s)}$. Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

- A. $S = 96,25 \text{ (m)}$ B. $S = 87,5 \text{ (m)}$ C. $S = 94 \text{ (m)}$ D. $S = 95,7 \text{ (m)}$

Lời giải

Chọn gốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đi. Sau 5s ô tô đạt vận tốc là $v(5) = 35 \text{ (m/s)}$.

Sau khi phanh vận tốc ô tô là $v(t) = 35 - 70(t - 5)$.

Ô tô dừng tại thời điểm $t = 5,5\text{s}$.

$$S = \int_0^5 7t dt + \int_5^{5,5} [35 - 70(t - 5)] dt = 96,25 \text{ (m)}$$

Quãng đường ô tô đi được là

Câu 14: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t \text{ (m/s)}$. Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường $s \text{ (m)}$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?

- A. $s = 168 \text{ (m)}$ B. $s = 166 \text{ (m)}$ C. $s = 144 \text{ (m)}$ D. $s = 152 \text{ (m)}$

Lời giải

Giai đoạn 1: Xe bắt đầu chuyển động đến khi gặp chướng ngại vật.

$$S_1 = \int_0^{12} v_1(t) dt = \int_0^{12} 2t dt = t^2 \Big|_0^{12} = 144 \text{ (m)}$$

Quãng đường xe đi được là:

Giai đoạn 2: Xe gặp chướng ngại vật đến khi dừng hẳn.

Ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v_2(t) = \int a dt = -12t + c$.

Vận tốc của xe khi gặp chướng ngại vật là: $v_2(0) = v_1(12) = 2 \cdot 12 = 24 \text{ (m/s)}$.

$$\Rightarrow -12 \cdot 0 + c = 24 \Rightarrow c = 24 \Rightarrow v_2(t) = -12t + 24$$

Thời gian khi xe gặp chướng ngại vật đến khi xe dừng hẳn là nghiệm phương trình:

$$-12t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

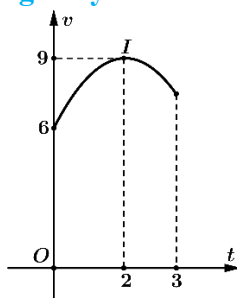
$$S_2 = \int_0^2 v_2(t) dt = \int_0^2 (-12t + 24) dt = (-6t^2 + 24t) \Big|_0^2 = 24 \text{ (m)}$$

Khi đó, quãng đường xe đi được là:

$$S = S_1 + S_2 = 168 \text{ (m)}$$

Vậy tổng quãng đường xe đi được là:

Câu 15: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v \text{ (km/h)}$ phụ thuộc thời gian $t \text{ (h)}$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường S mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



- A. $s = 25,25$ (km) B. $s = 24,25$ (km) C. $s = 24,75$ (km) D. $s = 26,75$ (km)

Lời giải

Gọi $v(t) = at^2 + bt + c$.

Đồ thị $v(t)$ là một phần parabol có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $A(0;6)$ nên

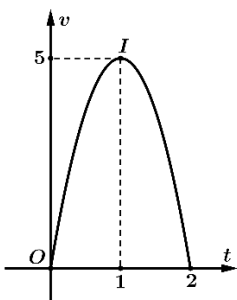
$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 9 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = 3 \\ c = 6 \end{cases}$$

ta tìm được

$$v(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6$$

Vậy $S = \int_0^3 \left(-\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6 \right) dt = 24,75$ (km)

Câu 16: Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



- A. 2,11 km B. 6,67 km C. 5,63 km D. 5,63 km

Lời giải

$$\Rightarrow S = \int_0^{1,5} v(t) dt$$

Ta có 1 giờ 30 phút = 1,5 giờ

Đồ thị $v = v(t)$ đi qua gốc tọa độ nên $v(t)$ có dạng $v(t) = at^2 + bt$.

Đồ thị $v = v(t)$ có đỉnh là $I(1;5)$ nên $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -5t^2 + 10t$

$$S = \int_0^{1,5} (-5t^2 + 10t) dt = \frac{45}{8} \approx 5,63$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t(s)$ là $a(t) = 2t - 7 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Biết vận tốc đầu bằng 6 (m/s) , xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ xác định bởi $v(t) = t^2 - 7t + 10$.
- b) Tại thời điểm $t = 7 \text{ (s)}$, vận tốc của chất điểm là 6 (m/s) .
- c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 7$ là 18 m .
- d) Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t = 7 \text{ (s)}$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int (2t - 7) dt = t^2 - 7t + C$ và $v(0) = 6 \Rightarrow C = 6$.

Vậy $v(t) = t^2 - 7t + 6 \text{ (m/s)}$.

b) Đúng: $v(7) = 7^2 - 7 \cdot 7 + 6 = 6 \text{ (m/s)}$.

c) Sai: Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 7$ là:

$$S = \int_1^7 v(t) dt = \int_1^7 (t^2 - 7t + 6) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} + 6t \right) \Big|_1^7 = -18$$

d) Sai: Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t là:

$$x(t) = \int v(t) dt = \int (t^2 - 7t + 6) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} + 6t + C$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t \in [0; 8]$.

Ta có $x'(t) = v(t) = 0$ khi $t = 1$ hoặc $t = 6$.

Lại có $x(0) = C$, $x(1) = \frac{17}{6} + C$, $x(6) = -18 + C$, $x(8) = -\frac{16}{3} + C$.

Vậy giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t \in [0; 8]$ đạt được khi $t = 1$.

Câu 2: Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0008x + 10,4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng $P(x) = -0,0008x^2 + 10,4x$.

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.

c) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là $49,79$ triệu đồng.

d) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100 .

Lời giải

a) Sai: Ta có: $P(x) = \int P'(x) dx = \int (-0,0008x + 10,4) dx = -0,0004x^2 + 10,4x$.

b) Đúng: Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là:

$$P(50) = -0,0004 \cdot 50^2 + 10,4 \cdot 50 = 519 \text{ (triệu đồng)}.$$

c) Sai: Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là:

$$P(55) - P(50) = \int_{50}^{55} P'(x) dx = \int_{50}^{55} (-0,0008x + 10,4) dx = - \int_{50}^{55} 0,0008x dx + \int_{50}^{55} 10,4 dx$$

$$= -0,0004x^2 \Big|_{50}^{55} + 10,4x \Big|_{50}^{55} = -0,0004(55^2 - 50^2) + 10,4(55 - 50) = 51,79 \quad (\text{triệu đồng}).$$

d) Sai: Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm là

$$P(a) - P(50) = \int_{50}^a P'(x) dx = \int_{50}^a (-0,0008x + 10,4) dx = - \int_{50}^a 0,0008x dx + \int_{50}^a 10,4 dx$$

$$= -0,0004x^2 \Big|_{50}^a + 10,4x \Big|_{50}^a = -0,0004(a^2 - 50^2) + 10,4(a - 50) = -0,0004a^2 + 10,4a - 519$$

Theo bài ra ta có:

$$-0,0004a^2 + 10,4a - 519 > 517 \Leftrightarrow 0,0004a^2 - 10,4a + 1036 < 0 \Leftrightarrow 100 < a < 25900$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của a là 101.

Câu 3: Ở nhiệt độ 37°C , một phản ứng hóa học từ chất đầu A , chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A \rightarrow B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời điểm x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4} y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng tại $x = 0$, nồng độ (đầu) của A là $0,05$ mol L^{-1} . Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$. Khi đó, ta có

a) $f'(x) = -7 \cdot 10^{-4}$

b) $f(x) = -7 \cdot 10^{-4}x + \ln(0,05)$

c) $y(30) - y(15) = -6 \cdot 10^{-4}$

d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng $0,05$.

Lời giải

$$f'(x) = (\ln y(x))' = \frac{y'(x)}{y(x)} = -7 \cdot 10^{-4}$$

a) Đúng: Ta có

b) Đúng: Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int (-7 \cdot 10^{-4}) dx = -7 \cdot 10^{-4}x + C$

Theo giả thiết $y(0) = 0,05$ nên $f(0) = \ln y(0) = \ln(0,05)$. Khi đó $C = \ln(0,05)$.

Vậy $f(x) = -7 \cdot 10^{-4}x + \ln(0,05)$.

c) Sai: Từ $f(x) = \ln y(x) \Rightarrow y(x) = e^{f(x)} = e^{-7 \cdot 10^{-4}x + \ln(0,05)} = \frac{1}{20} e^{-7 \cdot 10^{-4}x}$

Do đó $y(30) - y(15) = \frac{1}{20} (e^{-7 \cdot 10^{-4} \cdot 30} - e^{-7 \cdot 10^{-4} \cdot 15}) \approx -5,2 \cdot 10^{-4}$

d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây là:

$$\frac{1}{30-15} \int_{15}^{30} y(x) dx = \frac{1}{15} \int_{15}^{30} \left(-\frac{1}{7 \cdot 10^{-4}} \right) y'(x) dx = -\frac{10^4}{105} y(x) \Big|_{15}^{30} = -\frac{10^4}{105} [y(30) - y(15)] \approx 0,05$$

Câu 4: Sau khi xuất phát, ô tô di chuyển với tốc độ $v(t) = 2,01t - 0,025t^2$ ($0 \leq t \leq 10$). Trong đó $v(t)$ tính theo m/s, thời gian t tính theo giây với $t = 0$ là thời điểm xe xuất phát. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Quãng đường xe di chuyển được tính theo công thức là $s(t) = 2,01 - 0,05t \ (0 \leq t \leq 10)$
- b) Quãng đường xe di chuyển được trong 3 s là 8,82m.
- c) Quãng đường xe di chuyển được trong giây thứ 9 xấp xỉ 15,277m
- d) Trong khoảng thời gian không quá 10s đầu, khi vận tốc đạt giá trị lớn nhất thì gia tốc của xe là $1,51\text{m/s}^2$

Lời giải

- a) Sai: Quãng đường xe di chuyển được phải là nguyên hàm của $v(t)$,
 $v'(t) = 2,01 - 0,05t \ (0 \leq t \leq 10)$ là công thức tính gia tốc của vật.

- b) Đúng: Quãng đường xe di chuyển được trong 3 s là $\int_0^3 (2,01 - 0,025t^2) dt = 8,82\text{m}$.

- c) Đúng: Quãng đường xe di chuyển được trong giây thứ 9:

$$s(9) - s(8) = \int_8^9 (2,01 - 0,025t^2) dt \approx 15,277\text{m}$$

- d) Đúng: $v(t) = 2,01 - 0,025t^2 \ (0 \leq t \leq 10) \Rightarrow \max_{[0,10]} v(t) = 17,6 \ (m/s)$ khi $t = 10\text{s}$

Gia tốc vật khi đó là $a(10) = v'(10) = 2,01 - 0,05 \cdot 10 = 1,51 \ (m/s^2)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

- Câu 1:** Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t \ (m/s)$. Hỏi rằng trong 3s trước khi dừng hẳn vật di chuyển được bao nhiêu mét?

Lời giải

Vật chuyển động chậm dần cho đến khi dừng hẳn thì:

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow 160 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = 16(s)$$

Quãng đường vật đi được từ giây thứ 13 đến giây thứ 16 là:

$$S = \int_{13}^{16} v(t) dt = \int_{13}^{16} (160 - 10t) dt = 45\text{m}$$

- Câu 2:** Một xe mô tô phân khối lớn đang chạy với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc được biểu diễn bởi phương $a(t) = t^2 + 3t \ (m/s^2)$. Hỏi quãng đường của xe đi được trong quãng thời gian 10s đầu tiên sau khi tăng tốc?

Lời giải

Xe mô tô tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 3t \ (m/s^2)$. Vận tốc $v(t)$ chính là nguyên hàm của hàm số $a(t)$.

$$v(t) = \int a(t) dt = \int (t^2 + 3t) dt = \frac{t^3}{3} + 3\frac{t^2}{2} + C$$

Vận tốc ban đầu của xe là $v_0 = 10 \text{ m/s}$ nên

$$v(0) = 10 \Leftrightarrow \frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2} + C = 10 \Leftrightarrow C = 10 \Rightarrow v(t) = \frac{t^3}{3} + 3\frac{t^2}{2} + 10$$

Mặt khác, đạo hàm của quãng đường s chính là vận tốc v của xe chuyển động tại thời điểm t .

Suy ra, quãng đường đi được của xe sau 10s đầu tiên bằng tích phân của hàm $v(t)$ khi biến t từ 0s đến 10s.

$$S = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} \left(\frac{t^3}{3} + 3\frac{t^2}{2} + 10 \right) dt = \frac{4300}{3} \approx 1433$$

Câu 3: Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - t - 6$ (mét/giây). Quãng đường (mét) vật đi được trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$ bằng (làm tròn tới hàng phần trăm)

Lời giải

Gọi S là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$.

$$S = \int_1^4 |v(t)| dt = \int_1^3 |t^2 - t - 6| dt + \int_3^4 |t^2 - t - 6| dt$$

Ta có

$$= \left| -\frac{22}{3} \right| + \left| \frac{17}{6} \right| = \frac{61}{6} \approx 10,17 (m)$$

Câu 4: Một chiếc xe ô tô đang chạy trên đường cao tốc với vận tốc 72 km/h thì tài xế bất ngờ đạp phanh làm cho chiếc ô tô chuyển động chậm với gia tốc $a(t) = -\frac{8}{5}t$ (m/s^2), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi kể từ khi đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn thì ô tô di chuyển bao nhiêu mét (m)? (Giả sử trên đường ô tô di chuyển không có gì bất thường).

- A. $50 (m)$ B. $\frac{250}{3} (m)$ C. $\frac{200}{3} (m)$ D. $\frac{100}{3} (m)$

Lời giải

$$v(t) = \int a(t) dt = \int \left(-\frac{8}{5}t \right) dt = -\frac{4}{5}t^2 + C$$

Vận tốc của ô tô là

$$\text{Ta có } 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s} \quad \text{Vì } v(0) = 20 \quad \text{nên } C = 20 \Rightarrow v(t) = -\frac{4}{5}t^2 + 20$$

$$-\frac{4}{5}t^2 + 20 = 0 \Rightarrow t = 5$$

Khi xe dừng hẳn thì vận tốc bằng 0 nên

$$s = \int_0^5 \left(-\frac{4}{5}t^2 + 20 \right) dt = \left(-\frac{4}{15}t^3 + 20t \right) \Big|_0^5 = \frac{200}{3} (m)$$

Quãng đường cần tìm là

Câu 5: Công ty vừa đưa vào một dây chuyền sản xuất để chế tạo máy tính mới. Sau vài tuần, sản lượng

đạt được $q(t) = 4000 \left(1 - \frac{10}{(10-t)^2} \right)$ máy/tuần. Tìm số máy sản xuất được từ tuần thứ ba đến hết tuần thứ tư.

Lời giải

Số lượng máy tính từ đầu tuần thứ 3 đến hết tuần thứ 4 là:

$$\int_2^4 4000 \left(1 - \frac{10}{10-t^2} \right) dt = 4000t \Big|_2^4 + \frac{40000}{t-10} \Big|_2^4 \approx 6333$$

Câu 6: Việc thở là những vòng tuần hoàn, mỗi vòng tính từ lúc bắt đầu hít vào đến lúc kết thúc thở ra, thường kéo dài trong 5s. Vận tốc cực đại của khí là V l/s, vì thế nó được mô hình hoá bởi $v(t) = V \sin \frac{2\pi t}{5}$. Tính thể tích khí hít vào phổi sau thời gian 2s.

Lời giải

$$v(t) = V \sin \frac{2\pi t}{5}$$

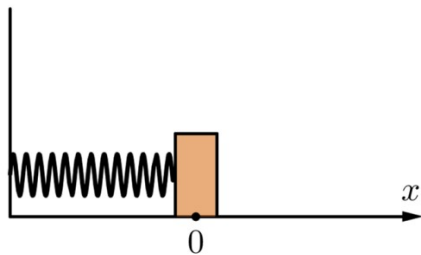
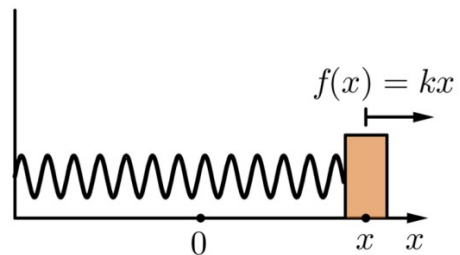
Vận tốc của khí hít vào được mô hình bởi công thức . Suy ra lượng khí hít vào

$$N(2) = \int_0^2 v(x) dx = \int_0^2 V \sin \frac{2\pi t}{5} dt = \frac{5V}{2\pi} \left(1 - \cos \frac{2\pi \cdot 2}{5} \right) = 1,44V$$

sau 2 giây là:

lít khí.

Câu 7: Một lực có độ lớn 40 N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 10 cm lên 15 cm. Biết rằng theo định luật *Hooke* trong Vật lý, khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm x so với độ dài tự nhiên của lò xo thì lò xo trở lại với một lực cho bởi công thức $f(x) = kx$ (N), trong đó k là hệ số đàn hồi của lò xo. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ 15 cm đến 20 cm?



Lời giải

Khi kéo lò xo từ 10 cm đến 15 cm nó bị kéo căng thêm 5 cm = 0,05 m.

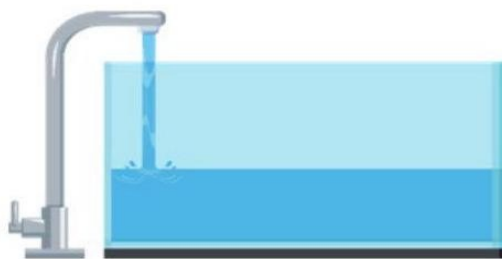
$$\Rightarrow f(0,05) = 40 \Leftrightarrow 0,05k = 40 \Rightarrow k = 800 \text{ do đó } f(x) = 800x$$

$$W = \int_{0,05}^{0,1} f(x) dx$$

Công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ 15 cm đến 20 cm là

$$\Rightarrow W = \int_{0,05}^{0,1} f(x) dx = \int_{0,05}^{0,1} (800x) dx = 800 \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{0,05}^{0,1} = 3 (J)$$

Câu 8: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là 90 m^3 và sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là 504 m^3 . Tính thể tích của lượng nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.



Lời giải

Ta có:
$$\int_0^3 (6at^2 + 2bt) dt = 90 \Leftrightarrow \left(2at^3 + bt^2 \right) \Big|_0^3 = 90 \Leftrightarrow 54a + 9b = 90 \quad (1)$$

$$\int_0^6 (6at^2 + 2bt) dt = 504 \Leftrightarrow \left(2at^3 + bt^2 \right) \Big|_0^6 = 504 \Leftrightarrow 432a + 36b = 504 \quad (2)$$

Mặt khác:

$$(1) \quad (2) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 6 \end{cases}$$

Từ và nên sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:

$$V = \int_0^9 (4t^2 + 12t) dt = \left(\frac{4}{3}t^3 + 6t^2 \right) \Big|_0^9 = 1458 \text{ (m}^3\text{)}$$

Câu 9: Hiệu suất của tim là lưu lượng máu được bơm bởi tim trên một đơn vị thời gian (lưu lượng máu chảy vào động mạch chủ). Để đo hiệu suất của tim, người ta bơm $A(\text{mg})$ chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải, chảy qua tim rồi vào động mạch chủ và đo nồng độ chất chỉ thị màu còn lại ở tim đến thời điểm $T(\text{s})$ khi chất chỉ thị màu tan sạch. Gọi $c(t)$ là nồng độ (mg/l) chất chỉ thị màu tại thời điểm $t(\text{s})$ thì hiệu suất của tim được xác định bởi

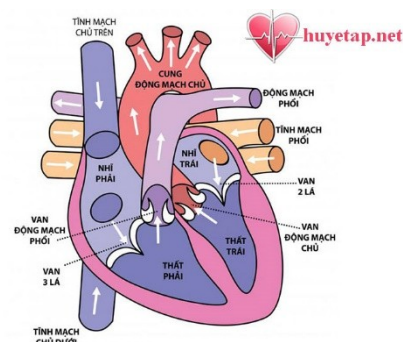
$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt} \text{ (l/s)}$$

. Tính hiệu suất của tim khi bơm 8 mg chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải,

biết $c(t) = \frac{1}{4}t(12-t)$ với $0 \leq t \leq 12$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

(Nguồn: James Stewart, Calculus, Cengage Learning).

Lời giải



$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt} (1/s)$$

Để tính hiệu suất của tim, chúng ta cần sử dụng công thức đã cho:

Trong đó: $A = 8$ mg (lượng chất chỉ thị bơm vào); $c(t) = \frac{1}{4}t(12-t)$ nồng độ chất chỉ thị màu tại thời điểm t ; $T = 12$ giây là thời gian khi chất chỉ thị màu tan sạch.

Đầu tiên, ta thay thế $c(t)$ vào tích phân: $\int_0^{12} c(t) dt = \int_0^{12} \frac{1}{4}t(12-t) dt$

Ta có thể tính tích phân này bằng cách phân tích: $\int_0^{12} \frac{1}{4}t(12-t) dt = \frac{1}{4} \int_0^{12} (12t - t^2) dt$

Khi đó: $\int_0^{12} 12t dt = 12 \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^{12} = 12 \cdot \frac{12^2}{2} = 12 \cdot 72 = 864$ và $\int_0^{12} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{12} = \frac{12^3}{3} = 576$.

Kết hợp lại ta có: $\int_0^{12} (12t - t^2) dt = 864 - 576 = 288$ nên $\int_0^{12} c(t) dt = \frac{1}{4} \cdot 288 = 72$

Khi đó hiệu suất của tim là: $F = \frac{A}{\int_0^{12} c(t) dt} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9} \approx 0,11(1/s)$