

BÀI TOÁN THỰC TẾ BÀI TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Câu 2. Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)(km)$ là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2te^{3t+1}(km)$. Hỏi vận tốc của tên lửa sau 1 giây là bao nhiêu, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị (biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?



Câu 3. Giả sử lợi nhuận của một cửa hàng tạp hoá nhỏ trong ngày thứ x của một tháng nào đó được cho bởi công thức $h(x) = -2x^2 + 40x + 700$ (đơn vị: nghìn đồng). Giả sử tháng đó có 30 ngày, hỏi có bao nhiêu ngày trong tháng đó cửa hàng có lợi nhuận tăng so với lợi nhuận ngày liền trước đó?

Câu 4. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi D2isc0overy. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 26(s)$ được cho bởi hàm số sau: v được tính bằng $ft/s, 1 \text{ foot} = 0,3048m$.

Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi? Kết quả thời gian được tính bằng giây và làm tròn đến hàng phần mười



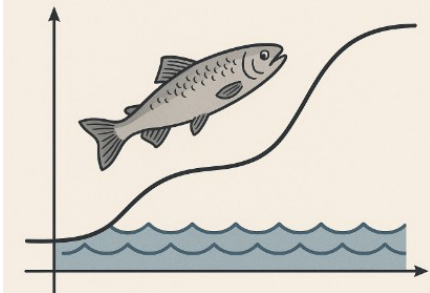
Câu 5. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 180t + 42t^2 - t^3, t = 0, 1, \dots, 30$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 30]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (đơn vị: người/ngày) tại thời điểm t . Hỏi trong 30 ngày đó, có bao nhiêu ngày mà tốc độ truyền bệnh giảm?

Câu 6. Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 34567 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi X , công ty phải trả 8 USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi $x(x \geq 1)$ là số đồ chơi X mà công ty đã sản xuất và $C(x)$ (đơn vị: USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi X . Khi đó chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X là hàm

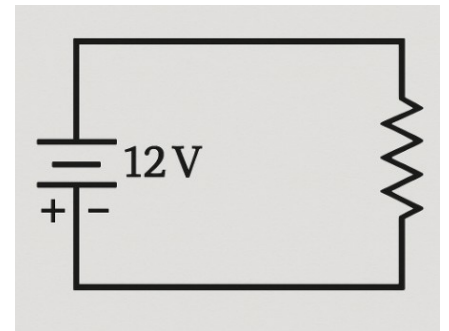
số $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ xác định trên $[1; +\infty)$. Khi số đồ chơi sản xuất tăng lên thì chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X giảm xuống nhưng không xuống dưới mức tối thiểu là bao nhiêu USD?

Câu 7. Một khách sạn có 50 phòng cho thuê. Giả sử doanh thu (tức là tổng số tiền thu được) là $T(x) = -\frac{1}{38}x^2 + 2x$ (triệu đồng) với x là số phòng cho thuê được. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của x nằm trong miền doanh thu $T(x)$ tăng?

Câu 8. Một con cá bơi ngược dòng để vượt khoảng cách 250km . Vận tốc dòng nước là 5km/h . Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(\text{km/h})$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là một hằng số và năng lượng E tính bằng Jun. Khi vận tốc bơi của cá nằm trong khoảng $(^m; ^n)$ lớn nhất $(^m, ^n$ là số nguyên hoặc là phân số tối giản) thì năng lượng tiêu hao của cá giảm. Tính $m + 2n$.



Câu 9. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin 12V được cho bởi công thức $P = 15I - 1,5I^2, 0 \leq I \leq 10$, với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Biết công suất P tăng trong khoảng cường độ dòng điện từ 0 đến P_M thì giảm, tìm P_M ?

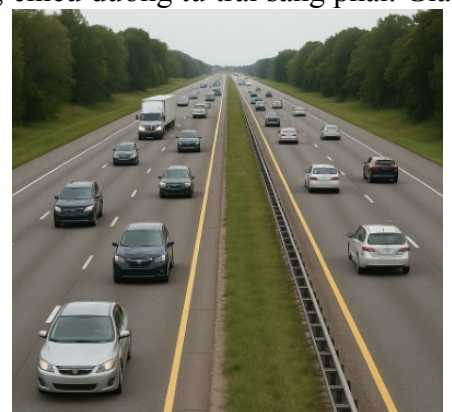


Câu 10. Một chất điểm chuyển động thẳng trên một trục số nằm ngang có chiều dương hướng sang phải theo quy luật $s(t) = -2t^3 + 24t^2 + 42t - 3$, với t (giây) ($0 \leq t \leq 10$) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và $s(t)(m)$ là vị trí của chất điểm tại thời điểm t . Hỏi kể từ lúc bắt đầu chuyển động, chất điểm chuyển động sang phải trong khoảng thời gian bao nhiêu giây?

Câu 11. Một cửa hàng quần áo đã thống kê số lượng quần áo bán ra trong ngày thứ $x(1 \leq x \leq 30)$ của một tháng xác định tuân theo quy luật được mô hình hoá bởi hàm số $f(x) = 3x^2 - 54x + 256$. Hỏi trong tháng đó, có bao nhiêu ngày có số lượng quần áo bán ra nhiều hơn ngày hôm trước?

Câu 12. Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử vị trí $s(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t, t \geq 0$. Hỏi chất điểm chuyển động sang trái trong khoảng thời gian bao nhiêu giây?

Câu 13. Vận tốc dòng xe trên một đoạn đường quốc lộ 123 từ 6 giờ sáng đến 10 giờ sáng trong ngày thường được xấp xỉ bởi $f(t) = 20t - 40\sqrt{t} + 52, 0 \leq t \leq 4$ trong đó $f(t)$ đo bằng km/giờ và t đo bằng giờ, với $t=0$ ứng với 6 giờ sáng. Qua đó người ta tìm được vào buổi sáng, tốc độ dòng xe giảm từ a giờ đến b giờ. Tìm b



Câu 14. Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (đơn vị là trăm người) và t là thời gian (tuần). Gọi $(a; b)$ là khoảng thời gian lâu nhất mà số người bị nhiễm bệnh tăng lên. Tính giá trị $P = 2a^2 - b^2$.

LỜI GIẢI

Câu 1. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Lời giải

Trả lời: 13

Ta có: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1$.

Nhận xét: $v(t)$ có đồ thị là một parabol nên trong $5s$ đầu tiên vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng 13 tại $t = 2s$.

Câu 2. Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)(km)$ là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2te^{3t+1}(km)$. Hỏi vận tốc của tên lửa sau 1 giây là bao nhiêu, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị (biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?



Lời giải

Trả lời: 546

$$v(t) = s'(t) = 2te^{t^2+3} + 2e^{3t+1} + 6te^{3t+1} \Rightarrow v(1) = 2e^4 + 2e^4 + 6e^4 = 10e^4 (km/s) \approx 546(km/s)$$

Câu 3. Giả sử lợi nhuận của một cửa hàng tạp hoá nhỏ trong ngày thứ x của một tháng nào đó được cho bởi công thức $h(x) = -2x^2 + 40x + 700$ (đơn vị: nghìn đồng). Giả sử tháng đó có 30 ngày, hỏi có bao nhiêu ngày trong tháng đó cửa hàng có lợi nhuận tăng so với lợi nhuận ngày liền trước đó?

Lời giải

Trả lời: 9

$$\text{Ta có: } h'(x) = -4x + 40; h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Bảng biến thiên của $h(x)$ trên đoạn $[1; 30]$:

x	1	10	30	
$h'(x)$		+	0	−
$h(x)$			900	
	738			100

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm lợi nhuận $h(x)$ có giá trị tăng trên đoạn $[1;10]$. Do đó các ngày có lợi nhuận tăng so với ngày liền trước đó là từ ngày 2 đến ngày 10.

Vậy có $10 - 2 + 1 = 9$ ngày.

Câu 4. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi D2isc0overy. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 26$ (s) được cho bởi hàm số sau: v được tính bằng ft/s , $1 \text{ foot} = 0,3048m$.

Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi? Kết quả thời gian được tính bằng giây và làm tròn đến hàng phần mười

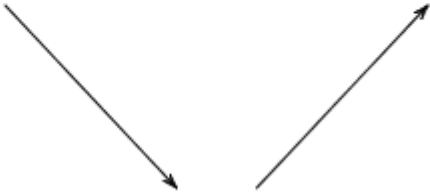


Lời giải:

Trả lời: 23,1

Gia tốc tàu con thoi là $a(t) = 3,906 \cdot 10^{-3} t^2 - 0,18058t$;
 $a'(t) = 7,812 \cdot 10^{-3} t - 0,18058$; $a'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{0,18058}{7,812 \cdot 10^{-3}} \approx 23,116$

Bảng biến thiên hàm gia tốc:

t	0	23,116	26	
$a'(t)$		-	0	+
$a(t)$				

Vậy kể từ thời điểm t xấp xỉ với 23,116 (s) thì gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng.

Câu 5. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 180t + 42t^2 - t^3, t = 0, 1, \dots, 30$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 30]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (đơn vị: người/ngày) tại thời điểm t . Hỏi trong 30 ngày đó, có bao nhiêu ngày mà tốc độ truyền bệnh giảm?

Lời giải

Trả lời: 16.

Ta có:

$$f'(t) = 180 + 84t - 3t^2; f''(t) = 84 - 6t; f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 14.$$

t	0	14	30		
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	180		768		0

Do đó trong khoảng $(14; 30)$ tức là từ ngày thứ 15 đến ngày thứ 30, thì tốc độ truyền bệnh giảm.

Do đó có $30 - 15 + 1 = 16$ ngày mà tốc độ truyền bệnh giảm.

Câu 6. Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 34567 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi X , công ty phải trả 8 USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi $x(x \geq 1)$ là số đồ chơi X mà công ty đã sản xuất và $C(x)$ (đơn vị: USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi X . Khi đó chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X là hàm số $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ xác định trên $[1; +\infty)$. Khi số đồ chơi sản xuất tăng lên thì chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X giảm xuống nhưng không xuống dưới mức tối thiểu là bao nhiêu USD?

Lời giải

Trả lời: 8

Ta có: $C(x) = 34567 + 8x$

Khi đó: $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{34567 + 8x}{x} = 8 + \frac{34567}{x}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(8 + \frac{34567}{x} \right) = 8$

Mà: $\bar{C}(x)$ là hàm nghịch biến trên $[1; +\infty)$ nên chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X giảm xuống thấp nhất và không dưới 8 USD.

Câu 7. Một khách sạn có 50 phòng cho thuê. Giả sử doanh thu (tức là tổng số tiền thu được) là $T(x) = -\frac{1}{38}x^2 + 2x$ (triệu đồng) với x là số phòng cho thuê được. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của x nằm trong miền doanh thu $T(x)$ tăng?

Lời giải

Trả lời: 38.

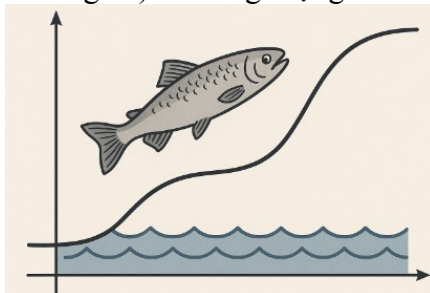
Ta có: $T'(x) = -\frac{1}{19}x + 2; T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 38$

x	0	38	50
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$	0	38	$\frac{650}{19}$

Khi đó, với $x \in (0; 38]$ thì $T(x)$ tăng.

Vậy có 38 giá trị nguyên dương x thỏa mãn.

Câu 8. Một con cá bơi ngược dòng để vượt khoảng cách $250km$. Vận tốc dòng nước là $5km/h$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là một hằng số và năng lượng E tính bằng Jun. Khi vận tốc bơi của cá nằm trong khoảng $(m; n)$ lớn nhất (m, n là số nguyên hoặc là phân số tối giản) thì năng lượng tiêu hao của cá giảm. Tính $m + 2n$.



Lời giải

Trả lời: 20

Vận tốc của cá khi bơi ngược dòng nước là $v - 5$ (km/h). Điều kiện: $v > 5$.

Thời gian để cá vượt qua quãng đường 250 km là $t = \frac{250}{v-5}$ (giờ).

Năng lượng tiêu hao của cá để vượt qua quãng đường đó là $E(v) = cv^3 \cdot \frac{250}{v-5}$ (Jun).

Ta có: $E'(v) = 250c \cdot \frac{2v^3 - 15v^2}{(v-5)^2}$; $E'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (loại) hoặc $v = \frac{15}{2}$.

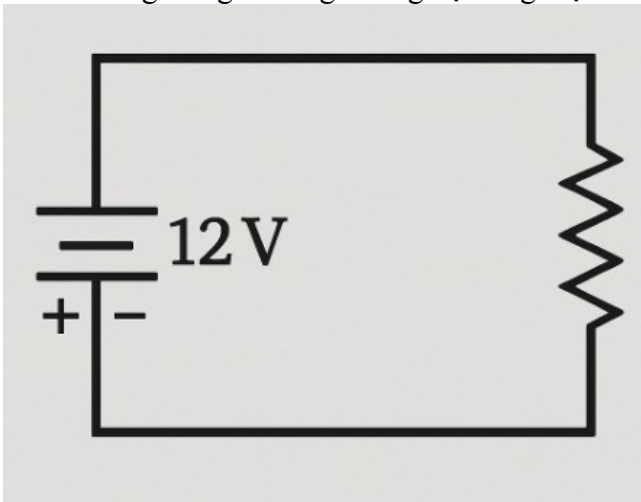
Bảng biến thiên:

v	5	$\frac{15}{2}$	$+\infty$
$E'(v)$	-	0	+
$E(v)$	$+\infty$	$\frac{84375c}{2}$	$+\infty$

Khi đó vận tốc bơi của cá nằm trong khoảng $\left(5; \frac{15}{2}\right)$ thì năng lượng tiêu hao của cá giảm.

Vậy $m = 5; n = \frac{15}{2} \Rightarrow m + 2n = 20$.

Câu 9. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin 12V được cho bởi công thức $P = 15I - 1,5I^2, 0 \leq I \leq 10$, với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Biết công suất P tăng trong khoảng cường độ dòng điện từ 0 đến P_M thì giảm, tìm P_M ?



Lời giải

Trả lời: 5

Xét hàm số $P = 15I - 1,5I^2$ với $0 \leq I \leq 10$.

Ta có: $P' = 15 - 3I; P' = 0 \Leftrightarrow I = 5 \in [0; 10]$.

Bảng biến thiên:

I	0	5	10	
P'		+	0	-
P				

Từ bảng biến thiên ta có công suất P tăng trong khi cường độ dòng điện thuộc khoảng $(0; 5)$.

Câu 10. Một chất điểm chuyển động thẳng trên một trục số nằm ngang có chiều dương hướng sang phải theo quy luật $s(t) = -2t^3 + 24t^2 + 42t - 3$, với t (giây) $(0 \leq t \leq 10)$ là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và $s(t)(m)$ là vị trí của chất điểm tại thời điểm t . Hỏi kể từ lúc bắt đầu chuyển động, chất điểm chuyển động sang phải trong khoảng thời gian bao nhiêu giây?

Lời giải

Trả lời: 6

Vận tốc chuyển động của chất điểm được xác định bởi $v(t) = s'(t) = -6t^2 + 48t - 42(m/s)$.

Chất điểm chuyển động sang phải (tức là theo chiều dương) khi $v(t) > 0 \Leftrightarrow -6t^2 + 48t - 42 > 0$
 $\Leftrightarrow t^2 - 8t + 7 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 7$.

Vậy, từ thời điểm $t = 1$ giây đến thời điểm $t = 7$ giây, chất điểm chuyển động sang phải.

Câu 11. Một cửa hàng quần áo đã thống kê số lượng quần áo bán ra trong ngày thứ $x(1 \leq x \leq 30)$ của một tháng xác định tuân theo quy luật được mô hình hoá bởi hàm số $f(x) = 3x^2 - 54x + 256$. Hỏi trong tháng đó, có bao nhiêu ngày có số lượng quần áo bán ra nhiều hơn ngày hôm trước?

Lời giải

Trả lời: 21

Ta có: $f'(x) = 6x - 54; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 9$

Ta có bảng biến thiên:

x	1	9	30		
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	205		13		1336

Vậy, các ngày trong tháng có số lượng quần áo bán ra nhiều hơn ngày hôm trước là từ ngày 10 đến ngày 30.

Khi đó có $30 - 10 + 1 = 21$ ngày thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử vị trí $s(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t, t \geq 0$. Hỏi chất điểm chuyển động sang trái trong khoảng thời gian bao nhiêu giây?

Lời giải

Trả lời: 4.

Ta có: $v(t) = s'(t) = (t^3 - 9t^2 + 15t)' = 3t^2 - 18t + 15$

$$v(t) < 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 18t + 15 < 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-5) < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 5$$

Chất điểm chuyển động theo chiều âm (từ phải sang trái) khi $v(t) < 0$, tức là $1 < t < 5$. Hay trong khoảng thời gian 4 (giây) thì điểm chuyển động sang trái.

Câu 13. Vận tốc dòng xe trên một đoạn đường quốc lộ 123 từ 6 giờ sáng đến 10 giờ sáng trong ngày thường được xấp xỉ bởi $f(t) = 20t - 40\sqrt{t} + 52, 0 \leq t \leq 4$ trong đó $f(t)$ đo bằng km/giờ và t đo bằng giờ, với $t=0$ ứng với 6 giờ sáng. Qua đó người ta tìm được vào buổi sáng, tốc độ dòng xe giảm từ a giờ đến b giờ. Tìm b



Lời giải

Trả lời: 7

Đạo hàm: $f'(t) = 20 - 40 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = 20 - \frac{20}{\sqrt{t}}$

Giải $f'(t) = 0$: $20 = \frac{20}{\sqrt{t}} \Rightarrow \sqrt{t} = 1 \Rightarrow t = 1$

Xét dấu

Với $0 < t < 1$: $\sqrt{t} < 1$ nên $20 - \frac{20}{\sqrt{t}} < 0 \Rightarrow f$ nghịch biến trên $(0, 1)$.

Với $1 < t \leq 4$: $\sqrt{t} > 1$ nên $20 - \frac{20}{\sqrt{t}} > 0 \Rightarrow f$ đồng biến trên $(1, 4)$.

- Buổi sáng, tốc độ dòng xe giảm từ 6h.A.M. đến khoảng 7h.A.M.,

- Sau đó tăng cho đến 10h.A.M.

Câu 14. Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (đơn vị là trăm người) và t là thời gian (tuần). Gọi $(a; b)$ là khoảng thời gian lâu nhất mà số người bị nhiễm bệnh tăng lên. Tính giá trị $P = 2a^2 - b^2$.

Lời giải

Đáp án: -64 .

Ta có $N'(t) = -3t^2 + 24t = 0 \Rightarrow t = 0; t = 8$. Bảng biến thiên như sau:

t	0	8	12	
N'	0	+	0	-
N	0	256	0	

Số người bị nhiễm bệnh tăng trên khoảng thời gian $(0; 8)$.

Vậy $P = 2 \cdot 0^2 - 8^2 = -64$.