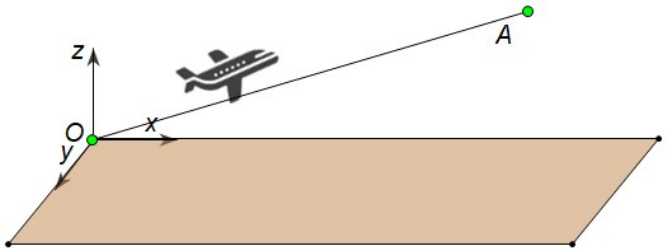
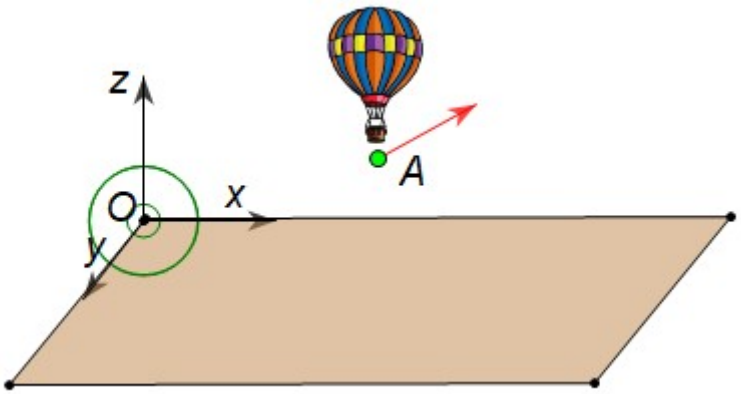
BÀI TOÁN THỰC TẾ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

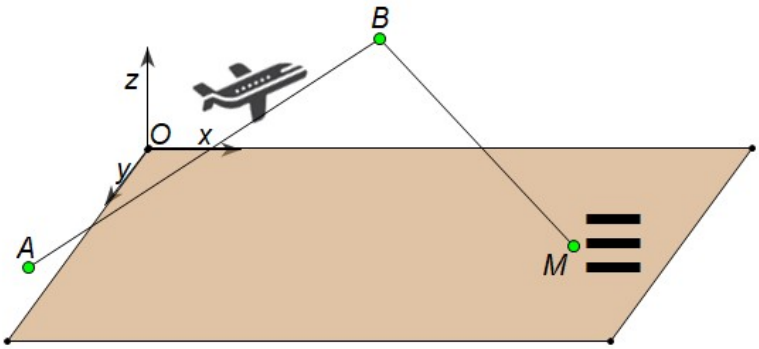
Câu 1. Một máy bay cất cánh tại một sân bay, sau khi bắt đầu cất cánh trong thời gian ngắn máy bay sẽ bay theo một đường thẳng và sân bay nơi máy bay cất cánh được coi là một mặt phẳng. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 km. Biết rằng, máy bay bắt đầu cất cánh tại điểm $O(0;0;0)$ và sau một thời gian ngắn máy bay bay đến điểm $A(2;5;1,2)$ và sân bay máy bay cất cánh nằm trên mặt phẳng (Oxy). Góc tạo bởi đường bay của máy bay cất cánh và sân bay bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ là độ)?



Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, một khinh khí cầu ở tọa độ $A(-16;-10;10)$ bắt đầu bay với vectơ vận tốc không đổi $\vec{v}=(4;3;-1)$ (đơn vị vận tốc là km/h) và dự kiến bay trong thời gian 10 giờ. Biết trạm kiểm soát không lưu đặt ở vị trí gốc tọa độ O kiểm soát được các vật thể cách trạm một khoảng tối đa bằng 12km. Thời gian kể từ khi trạm kiểm soát không lưu phát hiện ra khinh khí cầu đến khi khinh khí cầu ra khỏi vùng kiểm soát là bao nhiêu phút?

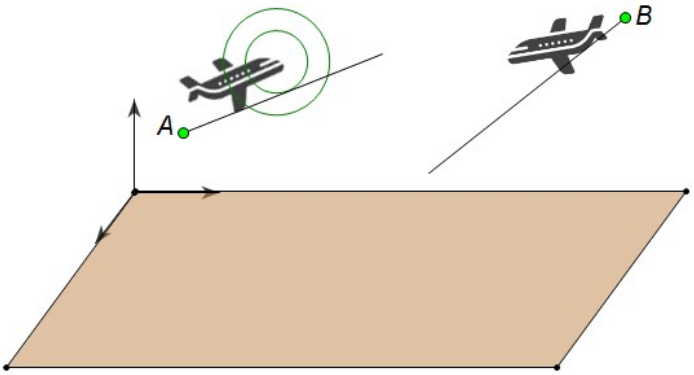


Câu 3. Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(5;\ 0;\ 5)$ đến vị trí $B(10;\ 10;\ 3)$ và hạ cánh tại vị trí $M(a;\ b;\ 0)$. Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu (viết kết quả dưới dạng số thập phân)?



Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mỗi đơn vị trên hệ trục ứng với 10 km, trạm kiểm soát không lưu đang theo dõi hai máy bay. Máy bay thứ nhất ban đầu ở tọa độ $A(25;-10;1)$ và

bay theo hướng vectơ $\overrightarrow{v_1}=(-3;-4;0)$ với tốc độ không đổi là 750 km/h. Máy bay thứ hai ban đầu ở tọa độ $B(30;-25;1,1)$ và bay theo hướng vectơ $\overrightarrow{v_2}=(-4;3;0)$ với tốc độ không đổi là 900 km/h. Trên máy bay thứ nhất có gắn radar tránh va chạm với bán kính hoạt động là 50 km. Hỏi thời gian máy bay thứ hai xuất hiện trên màn hình của radar máy bay thứ nhất là bao nhiêu phút (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

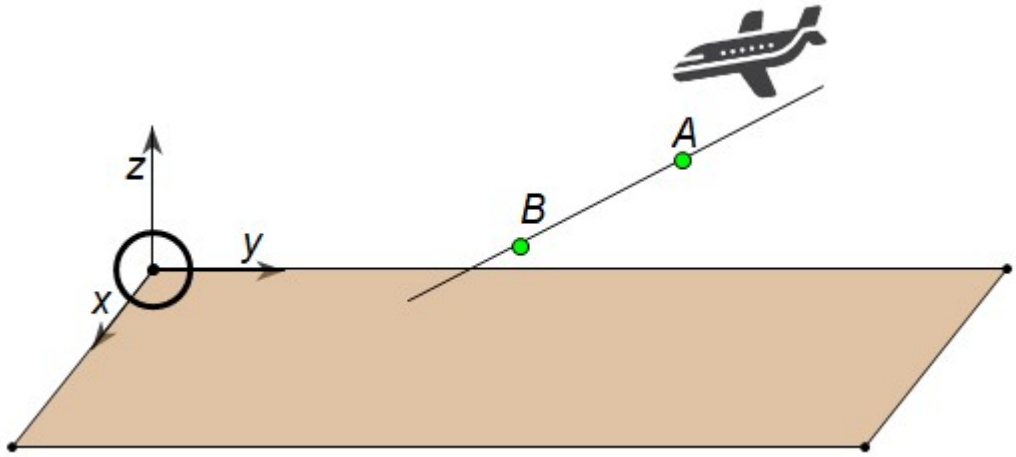


Câu 5. Kim tự tháp Giza ở Ai Cập có dạng một hình chóp tứ giác đều. Biết rằng cạnh đáy của kim tự tháp dài 230 m và chiều cao của kim tự tháp là $146,6\,m$. Tính độ dốc của mặt bên kim tự tháp so với mặt phẳng nằm ngang (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

Câu 6. Một phần mềm mô phỏng vận động viên tập bắn bia mục tiêu có kích thước nhỏ $(42\,\text{cm}\times 42\,\text{cm})$ trong không gian $Oxyz$ (giả sử $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1\,\text{cm}$). Cho biết vận động viên đó sử dụng thước ngắm 3 và đứng cách xa bia mục tiêu là 100 m, trục d của nòng súng và cọc đỡ bia d' lần lượt có phương trình $d:\begin{cases}x=t\\y=2\\z=4\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=1\\y=2\\z=1+3t'\end{cases}$. Để bắn trúng hồng tâm (thang điểm 10) thì vận động viên phải ngắm bắn vào điểm $N(a;b;c)\in d'$ và cách giao điểm của d và d' một khoảng 6 cm. Khi $c<0$, tính giá trị biểu thức $2a-b+3c$.

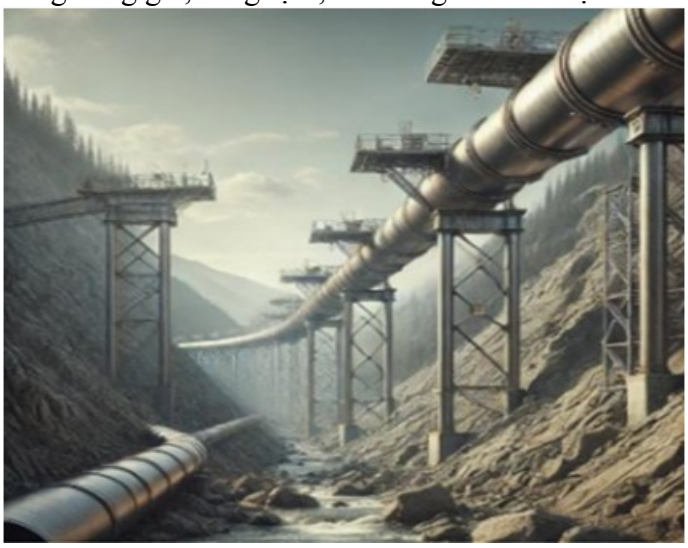
Câu 7. Xét trong không gian $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay đặt ở gốc toạ độ $O(0;0;0)$, đơn vị trên mỗi trục là ki-lô-mét. Một máy bay chuyển động theo đường thẳng, bay qua hai vị trí

$A(-500;-300;500)$ và $B(-200;-200;450)$. Khi máy bay ở gần đài kiểm soát không lưu nhất, toạ độ máy bay là $(a;b;c)$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.



Câu 8. Khi khắc phục hậu quả của thiên tai, bão lũ, một trong những giải pháp nhằm tiếp tế hàng cứu trợ đến những nơi khó tiếp cận là sử dụng flycam để xác định vị trí chính xác của người cần cứu trợ, sau đó sử dụng drone để vận chuyển các vật dụng thiết yếu thả xuống cho người này, giúp họ có thể cầm cự trong khi chờ đợi lực lượng cứu hộ đến nơi. Hai chiếc drone làm nhiệm vụ chuyển hàng cứu trợ bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất bay đến điểm cách điểm xuất phát 2,5*km* về phía nam và 1,5*km* về phía đông, đồng thời cách mặt đất 60*m*. Chiếc thứ hai bay đến điểm cách điểm xuất phát 3*km* về phía bắc và 2,5*km* về phía tây, đồng thời cách mặt đất 40*m*.Trong không gian, xét hệ tọa độ $Oxyz$ với gốc tọa độ O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc drone, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là mặt phẳng). Giả sử trong trường hợp khẩn cấp cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu và các vật dụng cứu trợ cho hai drone sao cho tổng khoảng cách từ vị trí tiếp nhiên liệu tới hai drone nhỏ nhất. Vị trí cần tìm cách gốc tọa độ a *km* theo hướng bắc và b *km* theo hướng tây. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

Câu 9. Đường ống dẫn trên không là hệ thống đường ống được treo trên các giá đỡ hoặc cột cao, dùng để vận chuyển dầu thô hoặc các sản phẩm dầu mỏ từ nơi này đến nơi khác mà không cần chôn dưới lòng đất. Hệ thống này thường được sử dụng trong các khu vực có địa hình khó khăn, vùng băng giá, rừng rậm,… những nơi mà việc đào đường ống ngầm không khả thi.



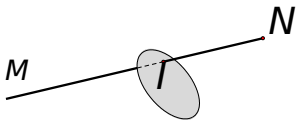
Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là mét, người ta thiết lập một đường ống dẫn dầu trên không dọc theo đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=16\end{cases}$ $(t$ là tham số). Vì địa hình phức tạp,

người ta đành chọn điểm $A(12;10;15)$ cạnh vách núi để làm điểm trung chuyển từ mặt đất (mặt phẳng Oxy) đến đường ống này. Dựa vào kinh nghiệm của mình họ phải chọn vị trí B thuộc đường ống và vị trí C thuộc mặt đất sao cho tổng độ dài các đoạn đường AB, BC, AC là bé nhất, tìm giá trị bé nhất đó theo đơn vị mét, làm tròn đến hàng phần chục.

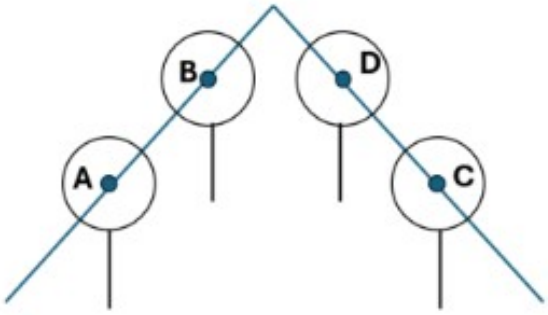
Câu 10. Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh.

Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $A(3;2,5;15)$ và $B(21;27,5;10)$. Khi du khách khi ở độ cao 12 mét thì tọa độ của du khách lúc đó là $M(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, mắt một người quan sát đặt tại điểm $M(1;2;3)$ và vật cần quan sát đặt tại điểm $N(2;3;-12)$. Một tấm bìa cứng có dạng hình tròn thuộc mặt phăng Oxy tâm đặt tại gốc tọa độ, bán kính R che khuất tầm nhìn của người quan sát. Khi đó bán kính của tấm bìa nhỏ nhất là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

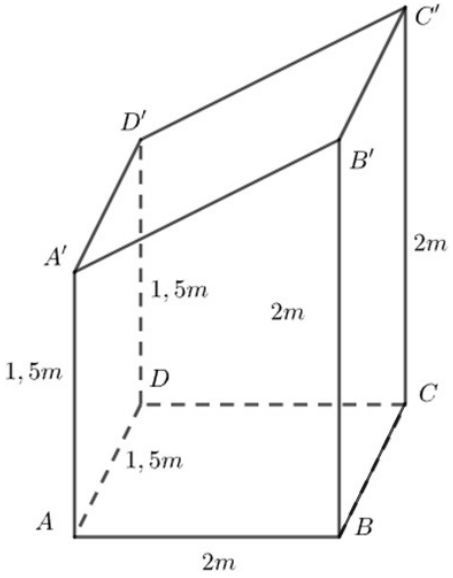


Câu 12. Trong một đợt diễn tập quốc phòng, hai người ở vị trí khác nhau cùng ngắm bắn một mục tiêu cố định trên không. Người ta gắn một hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét), mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất. Người thứ nhất bắn một viên đạn đi qua hai điểm $A(5;7;10)$ và $B(6;9;12)$. Người thứ hai bắn một viên đạn đi qua hai điểm $C(15;17;5)$ và D (điểm D ở độ cao 26 m so với mặt đất). Biết rằng sau một thời gian rời khỏi nòng súng, hai viên đạn chạm với nhau tại vị trí cách điểm A một khoảng 150 m (tham khảo hình vẽ)

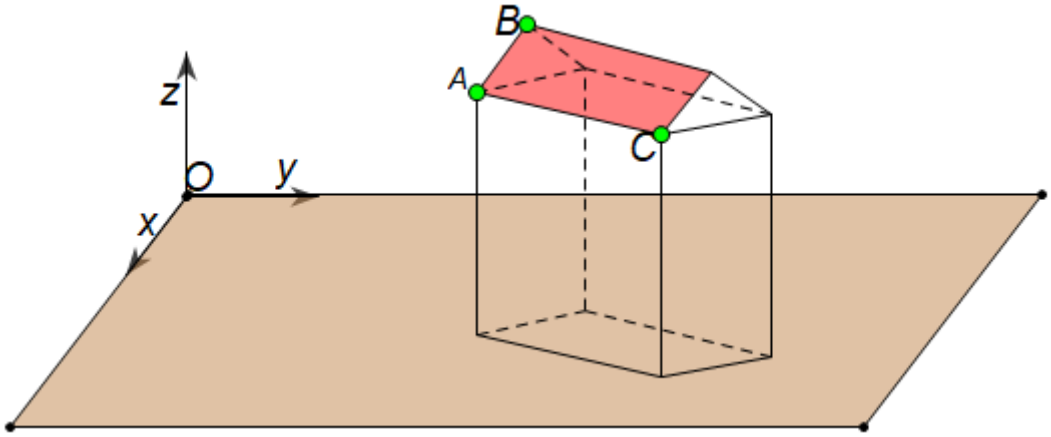


Hỏi D cách C một khoảng bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.

Câu 13. Một hộ gia đình muốn làm chiếc lều như hình vẽ. Đáy nằm trên nền đất phẳng, các cột vuông góc với đáy có chiều cao $AA¢= DD¢= 1,5m$, $BB¢= CC¢= 2m$, đáy là hình chữ nhật có $AB = 2m, AD = 1,5m$ (Tham khảo hình vẽ minh hoạ). Góc tạo bởi mái nhà và nền nhà là bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng đơn vị)

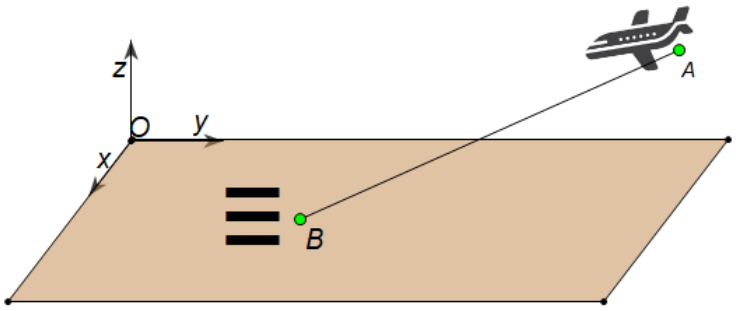


Câu 14. Khi gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà sao cho nền nhà thuộc mặt phẳng (Oxy), người ta coi mỗi mái nhà là một phần của mặt phẳng và thấy ba vị trí A, B, C ở mái nhà bên trái lần lượt có toạ độ $(2;0;4), (4;0;3)$ và $(4;9;3)$. Góc giữa mái nhà bên trái và nền nhà bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

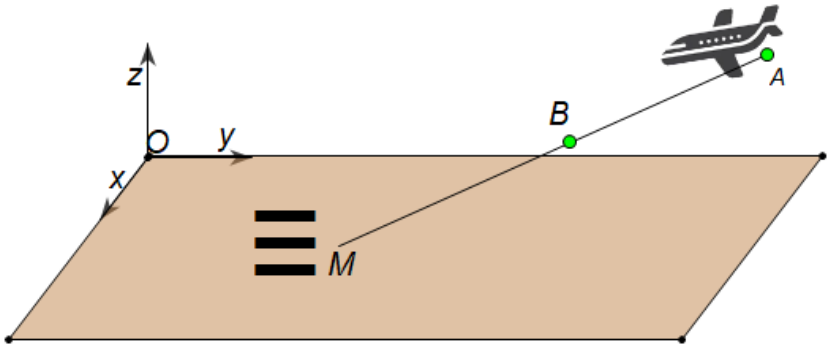


Câu 15. Khi gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilomét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay ở vị trí $A(3;2;-3)$ sẽ hạ cánh tới vị trí

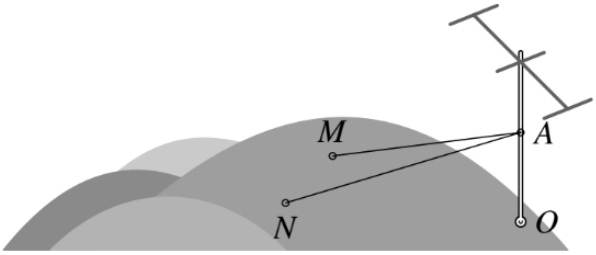
$B(8;8;0)$. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Câu 16. Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(5;0;5)$ đến vị trí $B(10;10;3)$ và hạ cánh tại vị trí $M(a;b;0)$. Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần chục)?



Câu 17. Người ta muốn dựng một cột ăngten trên một sườn đồi. Ăngten được dựng thẳng đứng trong không gian $Oxyz$ với độ dài đơn vị trên mỗi trục bằng 1m. Gọi O là gốc cột, A là điểm buộc dây cáp vào cột ăngten và M, N là hai điểm neo dây cáp xuống mặt sườn đồi (hình vẽ).

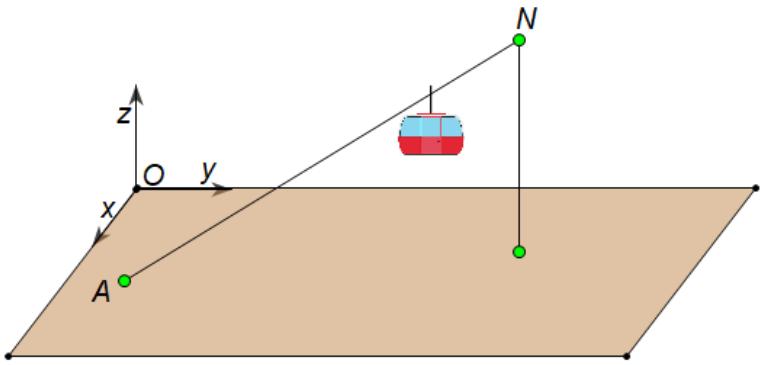


Cho biết tọa độ các điểm nói trên lần lượt là $O(0;0;0), A(0;0;8), M(4;-6;3)$, $N(-4;-3;2)$.

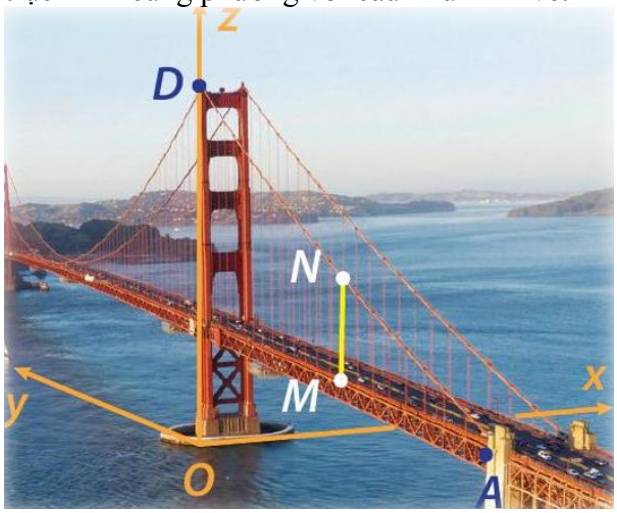
Góc tạo bởi sợi dây cáp MA với mặt phẳng sườn đồi (Làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị độ).

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-8;-6;0)$ với tốc độ là $10\,m/s$ (Đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét).

Giả sử sau $t(s)$ kể từ lúc xuất phát $(t\geq 0)$, cabin đến điểm N. Một người đứng tại điểm $O(0;0;0)$ quan sát cabin chạy trên cáp treo, sau thời gian bao nhiêu giây thì khoảng cách giữa người quan sát và cabin gần nhau nhất (đơn vị giây)?

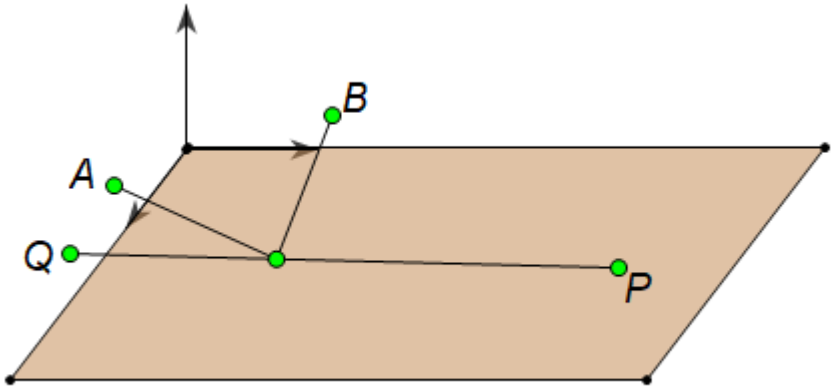


Câu 19. Cầu Cổng Vàng *(The Golden Gate Bridge)* ở Mỹ. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ với O là bệ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ.

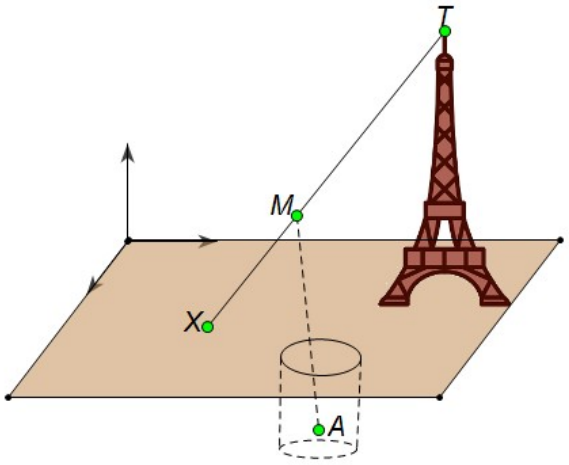


Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng (Oyz), trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước $326\,m$, điểm A cách mặt nước $82\,m$ và cách trục Oz $352\,m$.Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước $82\,m$ và MN song song với cột trụ. Tính độ dài đoạn MN, biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $250\,m$ (Kết quả làm tròn đến hàng đơn phần chục).

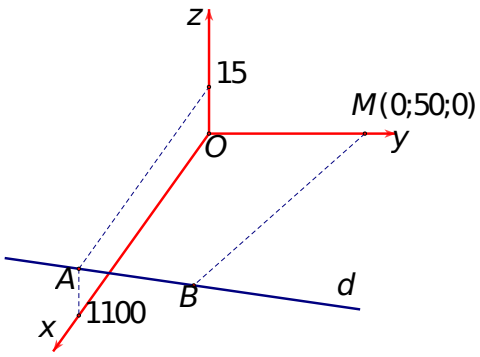
Câu 20. Chuẩn bị đến ngày sinh nhật, bạn Bình muốn trang trí căn phòng trọ của mình đẹp hơn. Trước khi trang trí, Bình gắn 2 móc treo vào các vị trí $P,Q,$ rồi căng một sợi dây từ P đến $Q.$ Tiếp theo, bạn gắn 2 móc treo vào các vị trí A và $B,$ sau đó lấy một điểm M nằm giữa đoạn thẳng PQ rồi tiếp tục căng dây từ M đến A và từ M đến $B.$ Xét một hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $P(1;1;0)$, $Q(3;0;1)$ $A(1;0;-1)$, $B(2;1;1)$ đơn vị trên mỗi trục là mét. Khi tổng độ dài các đoạn dây mà Bình sử dụng là ngắn nhất thì khoảng cách từ M đến P bằng bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



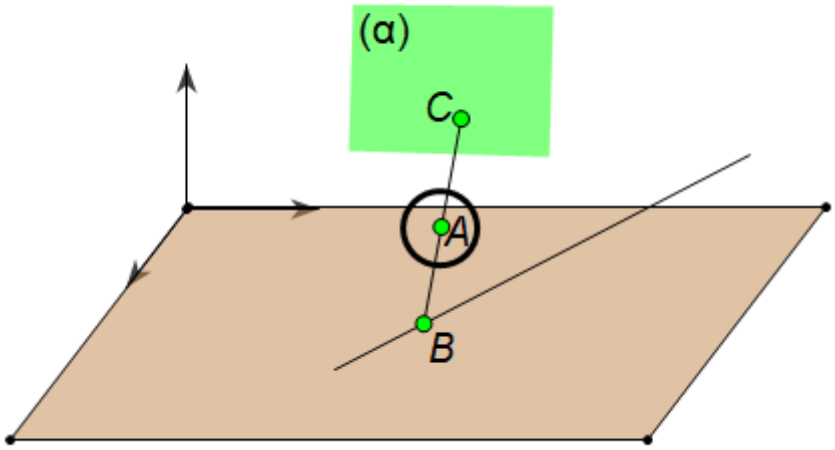
Câu 21. Người ta thiết kế một dây cáp chạy thẳng từ điểm X ở trên mặt đất tới đỉnh T của một tòa tháp. Giả sử tọa độ của các điểm là $T(40;60;150)$ và $X(100;-40;0)$ trong hệ tọa độ không gian $Oxyz$, với O là gốc tọa độ đặt tại mặt đất. Người ta muốn nối điểm $A(40;30;-20)$ nằm dưới một cái hố tới một điểm $M(a;b;c)$ nằm trên dây cáp sao khoảng cách MA này là nhỏ nhất. Tính $a+b+c.$



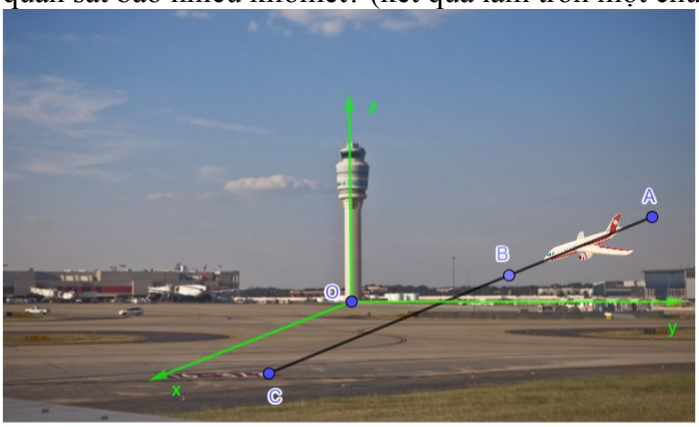
Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét mô hình phòng không như sau: rada đặt tại gốc tọa độ $O(0;0;0)$, tên lửa phòng không đặt tại điểm $M(0;50;0)$, mỗi đơn vị tương ứng với 10m, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Oz vuông góc mặt đất và hướng lên. Giả sử mọi UAV (phương tiện bay không người lái) và tên lửa đều chuyển động thẳng đều. Tại thời điểm $t=0(\text{s})$, rađa phát hiện ra UAV A ở toạ độ $A_0(1100;0;15).$ Tại thời điểm $t=1s$, rađa theo dõi thấy UAV A ở tọa độ $A_1(1095;1;14,5)$ trên đường thẳng d. Tại thời điểm $t=6(\text{s})$, một tên lửa được phóng lên và chuyển động thẳng đều với vận tốc $1300(\text{m/s})$, va chạm và phá huỷ UAV A tại điểm B trên d. Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ lúc được phóng lên thì tên lửa va chạm với UAV (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của giây)?



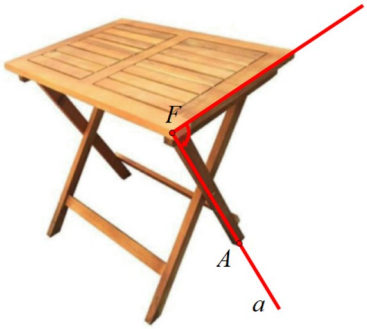
Câu 23. Trong một trung tâm nghiên cứu robot bay, người ta bố trí một thiết bị định vị tại điểm cố định $A(1;0;2)$ trong không gian ba chiều với hệ toạ độ $Oxyz$ (các đơn vị tọa độ được tính bằng mét). Thiết bị này giao tiếp đồng thời với hai cảm biến: Cảm biến thứ nhất di chuyển dọc theo đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$, cảm biến thứ hai được gắn trên mặt phẳng $(\alpha):2x-y+z+1=0$. Giữa hai cảm biến được kết nối bằng một đường truyền BC, trong đó B nằm trên đường thẳng Δ, C nằm trên mặt phẳng (α) và thiết bị định vị tại A là trung điểm của đoạn BC. Biết rằng đường thẳng BC có một véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;a;b)$, hãy tính giá trị $a+2b$.



Câu 24. Tại một sân bay, người ta chọn hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O tại vị trí chân của đài quan sát, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính theo kilomét). Trên màn hình Rađa người ta quan sát một máy bay đang hạ cánh theo đường thẳng từ vị trí $A(4;0;10)$ đến vị trí $B(5;5;6)$ và tiếp đất tại vị trí $C(a;b;0)$. Hỏi vị trí tiếp đất của máy bay cách chân đài quan sát bao nhiêu kilômét? (kết quả làm tròn một chữ số thập phân)

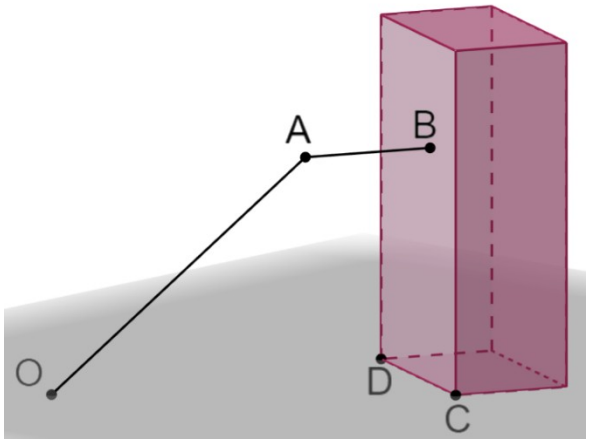


Câu 25. Một chiếc bàn gấp gọn đã được thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Điểm A là chân bàn tiếp xúc với mặt đất thuộc đường thẳng $a:\begin{cases}x=-3+t\\y=1+t\\z=-2+4t\end{cases}$ cắt mặt bàn $(P):x+y-2z+6=0$ tại điểm F. Độ dài chân bàn $FA=40\sqrt{3}\,cm$, khi đó độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là là bao nhiêu cm ?

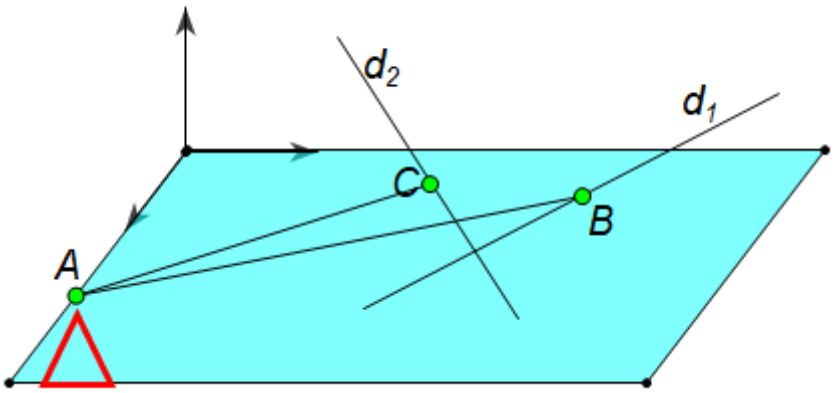


Câu 26. Một công ty logistics đang thử nghiệm hệ thống giao hàng tự động bằng máy bay không người lái (drone).

Trong không gian $Oxyz$, mỗi đơn vị trên các trục tương ứng với 1 mét trên thực tế. Mặt ngoài của một tòa nhà cao tầng được xem là một phần của mặt phẳng (P) thẳng đứng, đi qua hai điểm $C(10;50;0)$ và $D(30;10;0)$. Vị trí giao hàng là điểm B nằm trên mặt phẳng (P). Drone bắt đầu bay từ kho hàng tại gốc tọa độ $O(0;0;0)$. Ban đầu, nó bay theo một đường thẳng đến vị trí $A(30;40;120)$. Từ vị trí A, drone thay đổi đường bay, di chuyển theo phương vuông góc với mặt phẳng (P) đến vị trí giao hàng B. Tính khoảng cách từ O đến B (làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 27. Trạm tàu cứu hộ được đặt tại vị trí $A(5;0;0)$ trên một hòn đảo nhỏ trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục được tính bằng km), được sử dụng làm trạm cứu hộ, cứu nạn trên biển.

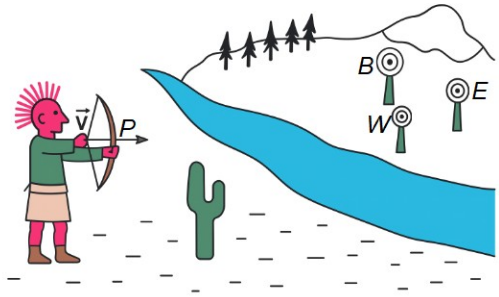


Tàu du lịch B đang di chuyển (vận tốc không đổi) trên tuyến đường được mô tả bởi đường thẳng $d_1:\begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=0 \end{cases}$. Tàu chở hàng C đang di chuyển (vận tốc không đổi) trên tuyến đường

$d_2: \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 11 + s \\ z = 0 \end{cases}$ vận tải được mô tả bởi đường thẳng . Do thời tiết xấu, nên hai tàu B và C gặp sự cố và cần được tiếp cận khẩn cấp. Trạm cứu hộ điều một tàu cứu hộ xuất phát từ A để lần lượt tiếp cận tàu du lịch B trước, sau đó đến tàu chở hàng C. Xét vị trí tối ưu của tàu du lịch B dừng lại và tàu chở hàng C dừng lại sao cho tổng quãng đường tàu cứu hộ cần đi $T = AB + BC + CA$ là nhỏ nhất. Khi đó $P_{\min} = \sqrt{a}\ (km)$, hãy tính $a + 2025$?

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai lớp kính lần lượt là hai mặt phẳng có phương trình $(\alpha): 2x - 2y - z + 3\sqrt{3} = 0, (\beta): -4x + 4y + 2z + 12\sqrt{3} = 0.$ Một nguồn sáng được chiếu vào hai tấm kính là tập hợp các đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;1;1)$ và đi qua các điểm $M(3;0;0), N(1;1;1)$ và $P(3;5;-5).$ Biết rằng các giao điểm của các đường thẳng nói trên với hai tấm kính (α) và (β) là 6 đỉnh của một khối đa diện. Thể tích V của khối đa diện tạo bởi 6 điểm đó có kết quả là $a\sqrt{b}$ với a,b nguyên dương và b là số nguyên tố. Tính giá trị của $a+b.$

Câu 29. Một cung thủ ngắm từ điểm $P(0;0;15)$ theo hướng của véc tơ $\vec{v} = (-1;3;0,5)$ để bắn trúng một trong ba bia được đặt trên vùng núi. (1 đơn vị $= 1\ dm$)



Tọa độ các bia:

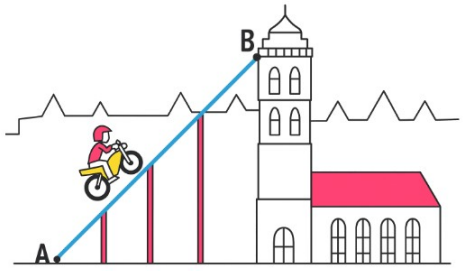
- Bia gấu: $B(-155;465;85)$

- Bia sói: $W(-155;465;92,5)$

- Bia nai: $E(-160;640;95)$

Giả sử mũi tên bay theo đường thẳng, tính vận tốc của mũi tên là bao nhiêu m/s, nếu thời gian bay là 1 giây? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Câu 30. Một nghệ sĩ đi dây dự định chạy xe mô tô theo đường thẳng từ điểm $A(20;20;0)$ lên tháp nhà thờ tại điểm $B(220;420;80)$ (với 1 đơn vị = 1m).

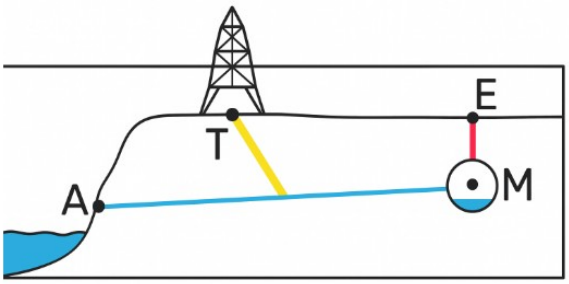


Sợi cáp được chống đỡ bởi ba cột thẳng đứng có đỉnh tại:

$S_1(70;120;20),\quad S_2(120;220;30),\quad S_3(170;300;60)$.

Hãy tìm tổng hoành độ các cột phù hợp để làm trụ đỡ

Câu 31. Tại các vị trí M có một hồ chứa nước (để trữ nước sau đó hút nước đưa lên mặt đất tại điểm E). Một kênh tràn k dẫn nước từ M đến A. Từ điểm T trên mặt đất, một mũi khoan thông khí b được khoan theo hướng của véc tơ $\vec{v}=(1;1;-4)$

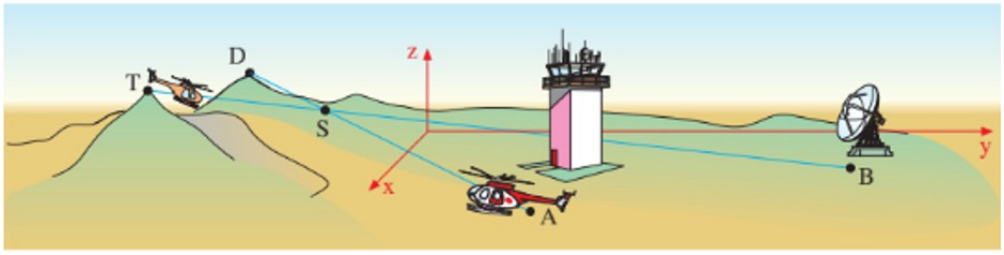


(1 đơn vị = 100m)

Các tọa độ: $M(8;12;-6)$, $N(14;2;-10)$, $A(11;0;-9)$, $T(8;2;0)$

Hỏi chiều dài mũi khoan cần là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

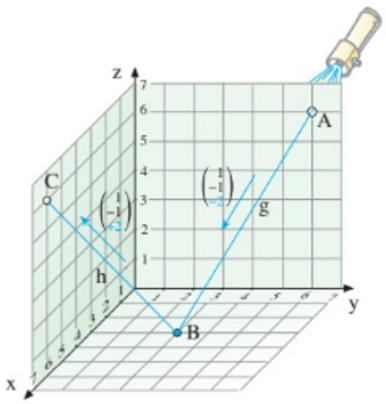
Câu 32. Trực thăng cứu hộ Alpha cất cánh lúc 10 giờ 00 từ điểm xuất phát Adlerhorst $A(10;6;0)$. Nó bay thẳng với vận tốc $300km/h$ tới đỉnh núi Mount Devil $D(4;-3;3)$, nơi xảy ra tai nạn. (Tọa độ tính bằng km).



Cùng lúc đó, trực thăng Beta cất cánh từ đỉnh núi Tempelberg $T(7;-8;3)$ để đưa du khách về điểm $B(4;16;0)$. Vận tốc của nó là $350km/h$.

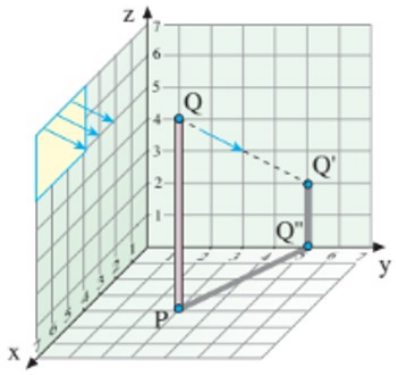
Người ta chứng minh được rằng hai trực thăng có đường bay giao nhau tại S. Khi Alpha tới S thì Beta đã đi qua trước đó một khoảng thời gian (tính bằng giây), hãy tìm khoảng thời gian đó? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Câu 33. Quỹ đạo của một tia sáng được theo dõi. Tia sáng xuất phát từ điểm $A(0;6;6)$ theo hướng của véc tơ $\vec{v}=(1;-1;-2)$ và đi tới mặt phẳng xOy, tại đó nó bị phản xạ.



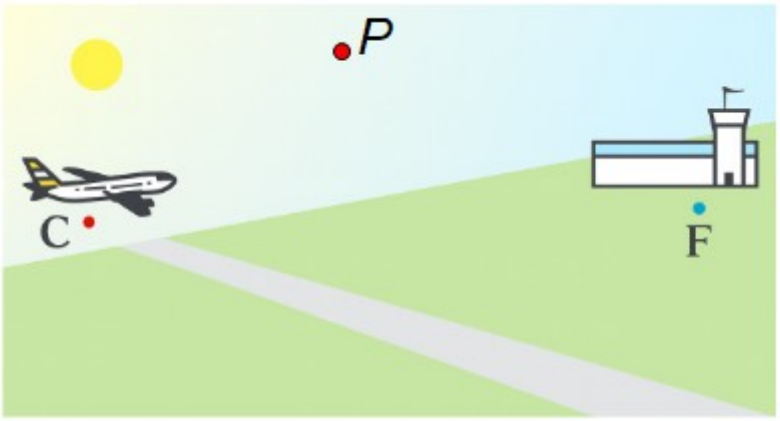
Tia sáng phản xạ cắt mặt phẳng xOz tại điểm $C(a;b;c)$ tính $a+b+c$?

Câu 34. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, có đoạn thẳng đứng PQ với: $P(4;3;0), Q(4;3;6)$.



Ánh sáng song song theo hướng của véc-tơ $\vec{v}=(-2;1;-2)$ chiếu vào đoạn thẳng (như hình). Hãy tính tổng độ dài đoạn chiếu bóng $PQ''+Q'Q''$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

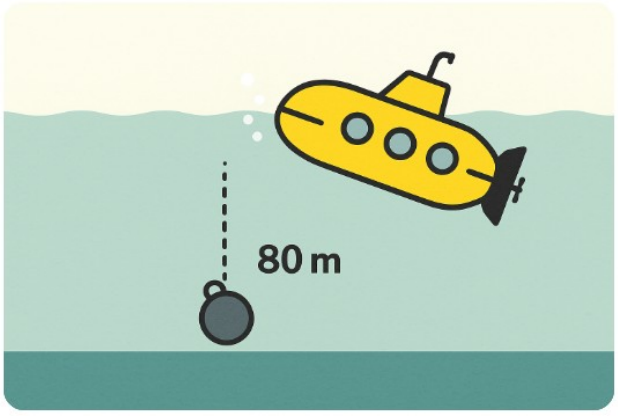
Câu 35. Máy bay Beta hướng tới điểm $C(10;-10;5)$ theo hướng của véc tơ $\vec{v}=(-2;2;-1)$
Khi qua điểm C, máy bay Beta nhận lệnh từ đài kiểm soát bay đổi hướng bay theo véc tơ $\vec{w}=(-5;4;-1)$. Ở điểm P có độ cao 1000 m, máy bay Beta sẽ thực hiện một lần đổi hướng cuối cùng theo vecto $\vec{u}$ để hạ cánh xuống sân bay F. Tính cosin góc của hai vecto $\vec{u}$ và $\vec{w}$. (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



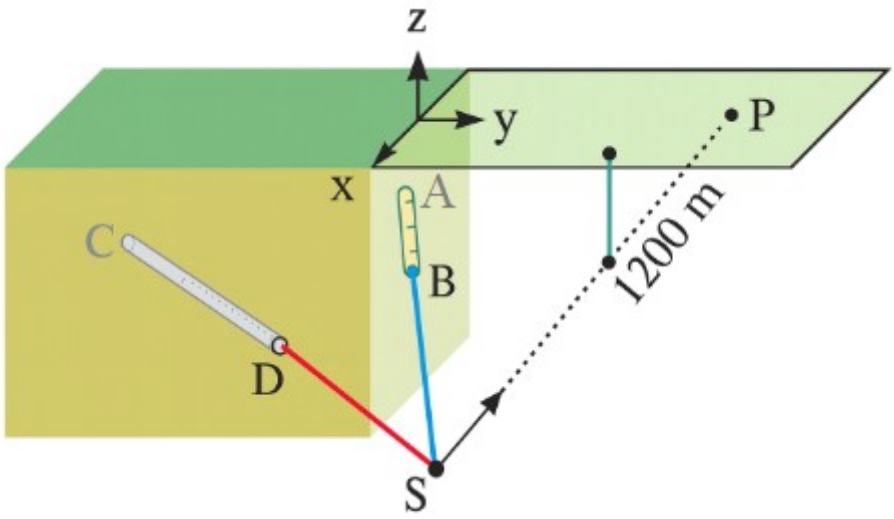
Sân bay F nằm trên mặt phẳng Oxy. Mỗi đơn vị trong hệ tọa độ tương ứng 1 km.

Câu 36. Một tàu ngầm bắt đầu lặn tại điểm $P(100;200;0)$ với vận tốc 11,1 hải lý/giờ theo hướng tới mục tiêu $Z(500;600;-80)$ cho đến khi đạt độ sâu 80 m.
(1 hải lý/giờ sắp xỉ 1,852 km /h)

Sau đó, tàu tiếp tục di chuyển ngang hướng theo vecto $\vec{u}=(1;1;0)$ với vận tốc 11 hải lý/giờ. Một quả cầu T được thả đồng thời khi tàu ngầm bắt đầu lặn, từ tàu nghiên cứu $S(700;800;0)$ và rơi thẳng đứng xuống với vận tốc $0,5\,m/s$. Tính khoảng cách tàu ngầm với quả cầu khi tàu ngầm đi đến thẳng dưới S (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



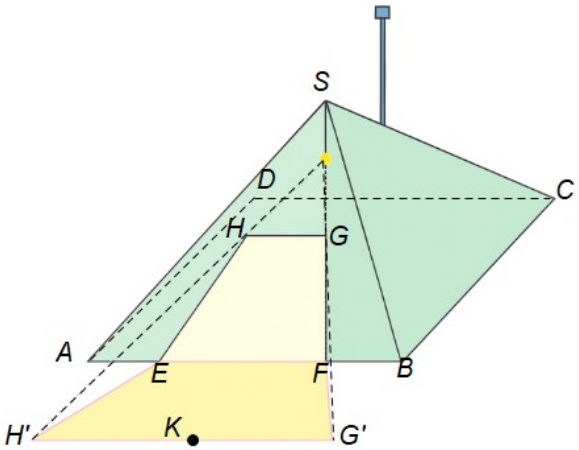
Câu 37. Từ điểm $A(-7;-3;-8)$ qua điểm $B(-2;0;-9)$ một đường hầm thẳng tên Kuckucksloch sẽ được đào xuyên vào núi.



Tương tự, từ điểm $C(4;-6;-6)$ qua điểm $D(7;-1;-8)$ một đường hầm thẳng tên Morgenstern cũng sẽ được xây dựng. Sau khi khoang xong 2 đường hầm sẽ gặp nhau tại điểm S. Từ điểm S, đường hầm Kuckucksloch tiếp tục đào theo hướng véc tơ $(2;1;2)$, cho đến khi đến điểm P trên mặt đất mà đường hầm sẽ chạm tới. Trên đoạn SP, cách P một khoảng 1200 m sẽ đào một lối thoát hiểm thẳng đứng. Tính độ sâu cần đào bằng bao nhiêu mét?

(Mỗi đơn vị trong hệ tọa độ tương ứng 100 m. Mặt đất là mặt phẳng xOy)

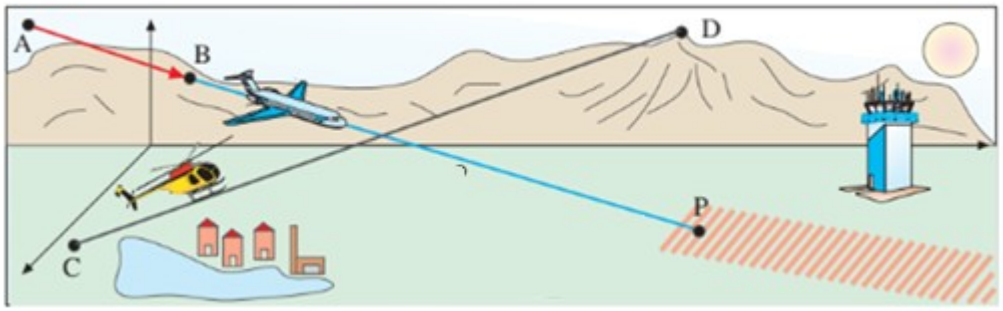
Câu 38. Một cái lều có dạng hình chóp tứ giác đều, đáy rộng 8 m và cao 3 m.



Cửa vào là hình thang $EFGH$ trong đó đoạn $AE = FB$, với $|EF| = 4\,m$, G và H lần lượt là trung điểm của các đoạn ES và FS. Một nguồn sáng đặt cách đỉnh S $1\,m$ ở phía dưới. Ánh sáng chiếu ra ngoài qua cửa vào, tạo thành một vùng được chiếu sáng $EFG'H'$.

Ở giữa cạnh sau CD của lều có gắn một camera trên một cột thẳng đứng. Camera phải đặt ở độ cao ít nhất là bao nhiêu mét để quan sát được điểm K là trung điểm của $H'G'$?

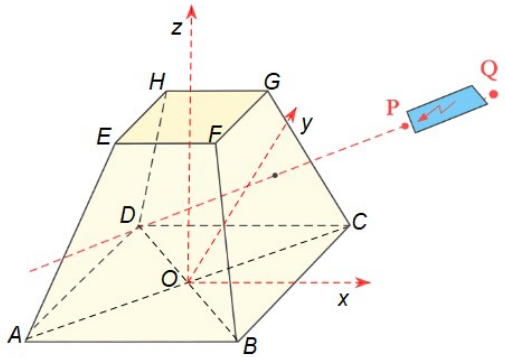
Câu 39. Một máy bay đang bay với vận tốc không đổi trong quá trình tiếp cận đường băng. (Các giá trị tọa độ tính bằng km).



Lúc 16:00, máy bay ở vị trí $A(4;0;6)$. Một phút sau, máy bay ở vị trí $B(5;3;4,5)$ và sẽ bay tiếp đến điểm P trên đường băng (mặt phẳng $z = 0$).

Cùng lúc bắt đầu tiếp cận ở A, một trực thăng khởi hành từ giàn khoan dầu $C(12;0;0)$ theo hướng tới trạm trên núi $D(-2;14;7)$. Thời gian dự kiến cho chuyến bay này là đúng 5 phút. Ta chứng minh được quỹ đạo bay của trực thăng và máy bay sẽ cắt nhau tại một điểm M nhưng sẽ không xảy ra tai nạn vì thời gian đi qua điểm M của trực thăng và máy bay chênh lệch nhau. Tìm thời gian chênh lệch đó là bao nhiêu giây? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Câu 40. Một khối thép không gỉ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều.



- Độ dài cạnh đáy lớn: 8 cm

- Độ dài cạnh đáy nhỏ: 4 cm

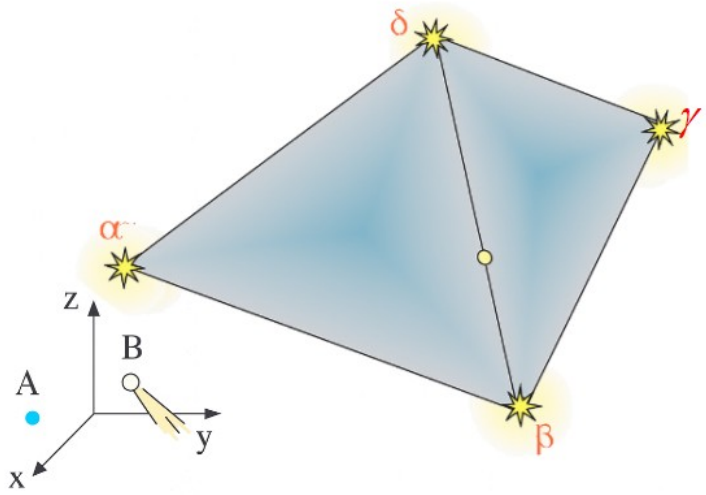
- Chiều cao: 8 cm

Gốc tọa độ $O(0;0;0)$ đặt tại tâm đáy lớn.

Tia laser khoan theo đoạn PQ với: $P(-3,5;9,5;6)$, $Q(-6;16;8)$

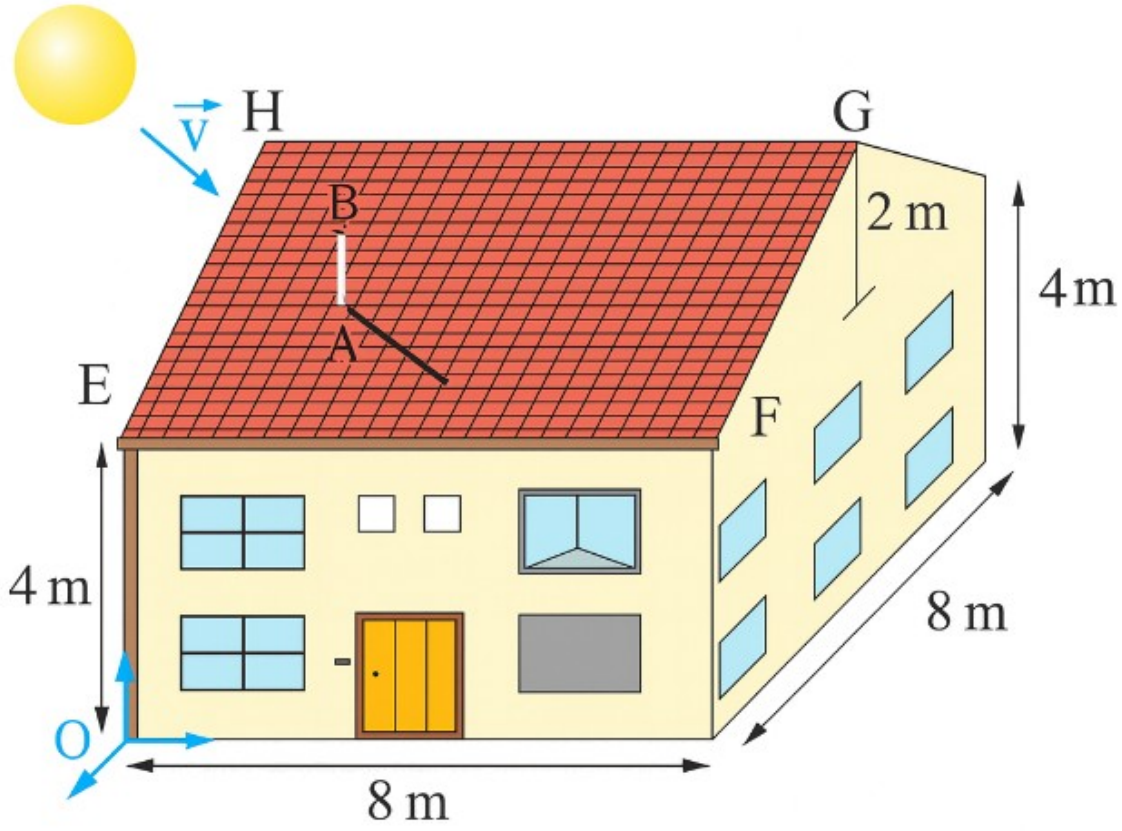
Tính độ dài kênh khoan biết đầu vào nằm trong mặt $CDHG$ và đầu ra nằm trong mặt $ABFE$

Câu 41. Bốn ngôi sao $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tạo thành một vùng không gian hình chóp tứ giác. Tọa độ các ngôi sao là: $\alpha(4;4;8)$, $\beta(0;20;0)$, $\gamma(-16;16;4)$, $\delta(-8;12;12)$



Một sao chổi bay theo đường thẳng qua hai điểm $A(10;3;1)$ và $B(4;7;3)$. Người ta thấy rằng sao chổi đi vào vùng không gian tại điểm S thuộc tam giác $\alpha\beta\gamma$ và tại đó sao chổi rời khỏi vùng không gian hình chóp này tại điểm T. Tính độ đường đi ST bằng bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). (1 đơn vị $= 1000km$)

Câu 42. Cho ngôi nhà như hình bên phải (các kích thước tính theo mét).

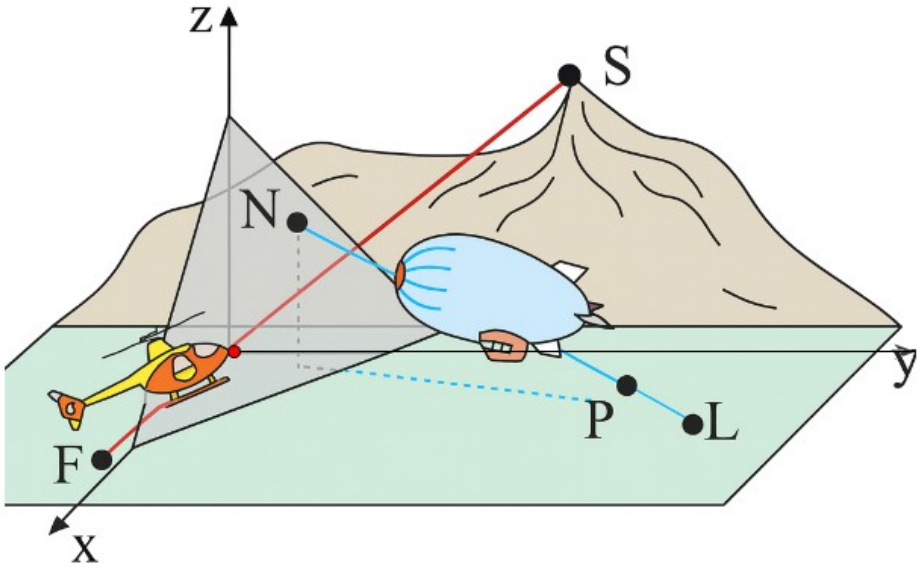


Một ăng-ten trên mái nhà có hai điểm đầu mút: $A(-2;2;5)$, $B(-2;2;6)$

Chiếu ánh sáng song song theo hướng của véc-tơ $\vec{v} = (2;8;-3)$ vào ăng-ten, bóng của ăng-ten sẽ đổ xuống mặt phẳng mái $EFGH$.

Tính chiều dài bóng của ăng-ten trên mái nhà bằng bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Câu 43. Một khinh khí cầu l xuất phát từ sân bay $L(24;52;0)$ và sau đó được xác định tại $P(20;42;2)$.



Một trực thăng h bay thẳng đều cùng thời điểm trong ngày, xuất phát từ sân bay quân sự $F(20;-8;0)$ hướng về đỉnh núi $S(-4;32;16)$.

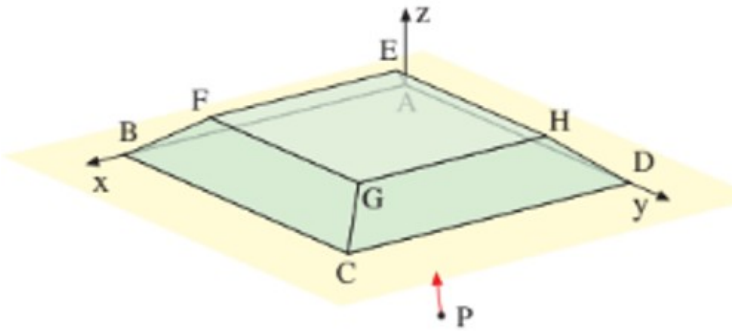
Bức tường sương mù được mô tả bởi mặt phẳng E_{ABC} với $A(16;0;0),\quad B(0;16;0),\quad C(0;0;16).$

Gọi T là vị trí mà quỹ đạo bay của khinh khí cầu l và trực thăng h cắt nhau.

Trên quỹ đạo bay tiếp theo, khinh khí cầu l đi vào tường sương mù tại N.

Tính khoảng cách TN (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) (các kích thước tính theo km).

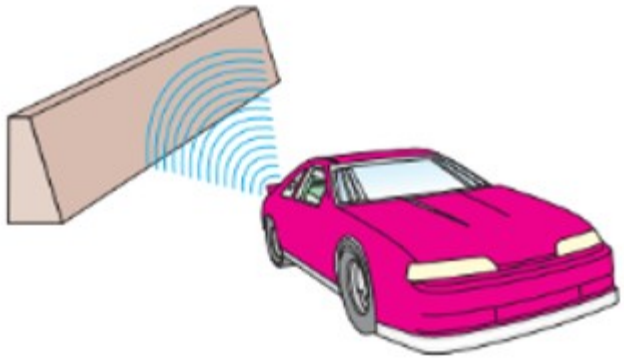
Câu 44. Cho các điểm $A(0;0;0), B(12;0;0), C(12;12;0)$ và $D(0;12;0)$ là các đỉnh của đáy hình chóp cụt bằng kính (xem hình bên).



Các đỉnh của mặt trên là $E(2;2;3), F(10;2;3), G(10;10;3)$ và $H(2;10;3)$.

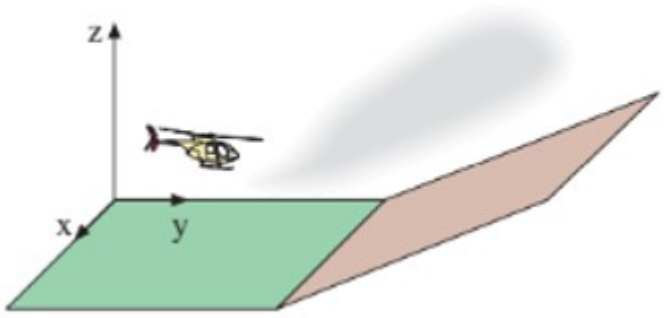
Tại điểm $P(14;20;0)$ đặt một tia laser, bắn theo hướng vecto $\vec{v}=(-3;-3;0,5).$ Tia laser sẽ cắt mặt phẳng CDH tại điểm $T(a;b;c)$, tính $a+b+2c$?

Câu 45. Khi phát triển hệ thống hỗ trợ đỗ xe ô tô, các nhà nghiên cứu sinh học đã sao chép hệ thống định vị của loài dơi và tích hợp các cảm biến tương ứng vào cản sau của xe. Các cảm biến được cài đặt sao cho chúng sẽ phát tín hiệu khi khoảng cách đến vật cản nhỏ hơn $0,3\,m$.



Một người lái xe đang lùi thẳng về phía một mặt phẳng nghiêng, được cho bởi phương trình: $E:\ 6x+2y+3z=49$. Xác định được điểm $R(a;b;c)$ trên đoạn PQ trong đó $P(6;3;1)$ và $Q(6;4;1)$ mà tại đó cảm biến bắt đầu báo động. Tính $a-b+c$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

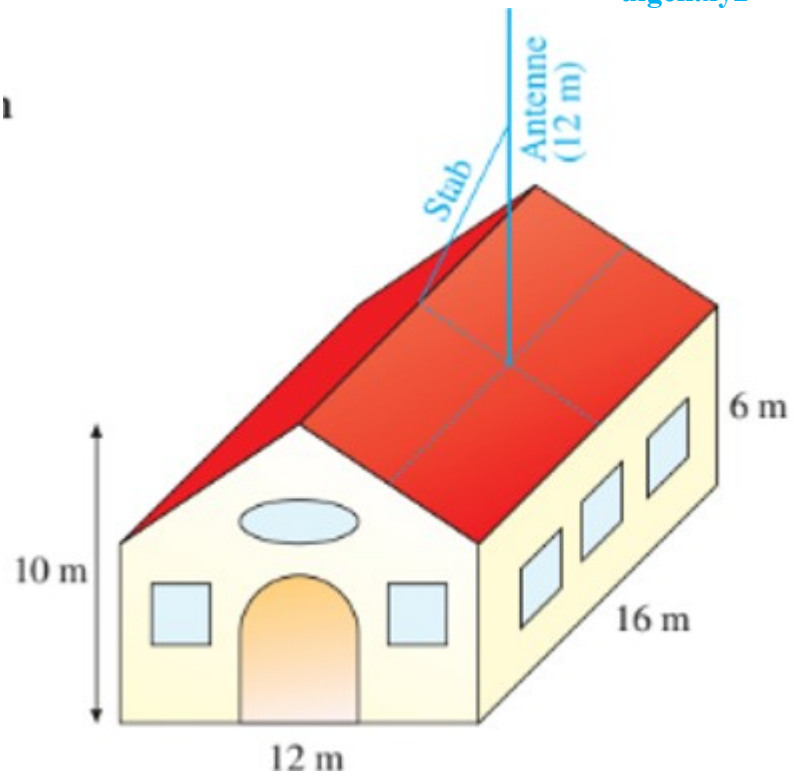
Câu 46. Một chiếc trực thăng bay trong điều kiện tầm nhìn kém tiến về phía một sườn núi dốc lên, được mô tả bởi các điểm $P(0;5;0),\ Q(5;10;2),\ R(10;10;2)$



Trực thăng bay qua các điểm $A(1;6;1)$ và $B(2;7;1)$ (đơn vị km).

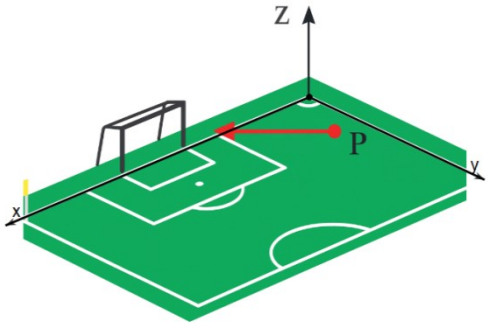
Nếu trực thăng tiếp tục giữ nguyên hướng bay hiện tại, sẽ va vào sườn núi. Vì thế để tránh tai nạn, tại điểm B phi công giữ nguyên hướng theo phương $x-y$ nhưng bay lên với góc nâng sao cho đường bay song song với sườn núi. Tính góc mà phi công đã thay đổi hướng bay tại điểm B (làm tròn kết quả đến hàng phần mười, đơn vị độ)

Câu 47. Chính giữa mặt bên phải của mái nhà (như hình minh họa) có một ăng-ten cao 12 m nhô ra. Ăng-ten được cố định bởi một thanh thép, đầu trên của thanh được gắn ở điểm cách đỉnh ăng-ten 4 m và đầu dưới được bắt vít tại chính giữa đỉnh mái.



Tính góc giữa thanh thép giữa thanh thép và mặt phẳng mái nhà (gắn ăng-ten) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười, đơn vị độ)

Câu 48. Một sân bóng đá rộng 60 m. Trong một quả đá phạt, bóng được sút từ vị trí $P(3;9;0)$ theo hướng của vecto $\vec{v}=(18;-6;1)$ về phía khung thành rộng $7,20m$, cao $2,40m$. Quỹ đạo bay được giả sử là một đường thẳng. Vận tốc bóng ước tính $28,5m/s$.



Tính thời gian bóng bay tới khung thành.

Câu 49. Một tàu ngầm nghiên cứu bị mất tích. Được hai tàu trên mặt biển tìm kiếm phát hiện tàu ngầm cùng lúc.

- Tàu 1 phát hiện tàu ngầm theo hướng của vecto $\vec{v}_1=(-1;3;-1)$.

- Tàu 2 phát hiện tàu ngầm cùng lúc theo hướng của vecto $\vec{v}_2=(4;2;-1)$.

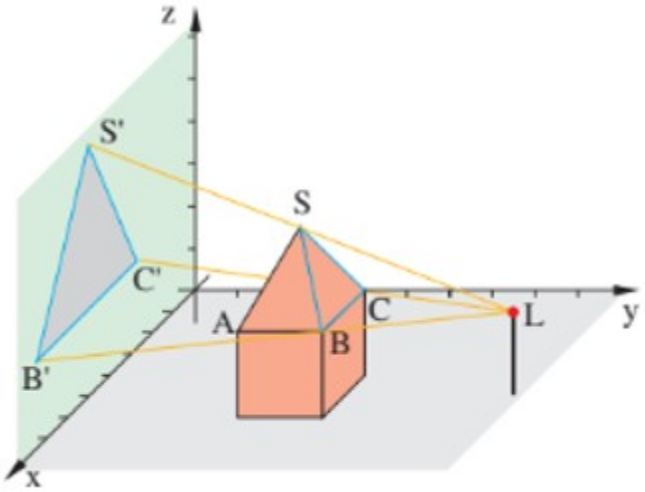
Tàu 1 ở vị trí $P(6;2;0)$, còn tàu 2 ở vị trí $Q(-4;4;0)$ đang neo đậu.

Bốn phút sau, các tàu lại đo hướng và xác định rằng tàu ngầm hiện đang ở vị trí $B(6;10;-1)$ (1 đơn vị độ dài $=100m$).

Tàu ngầm tiếp tục di chuyển thẳng từ B cho đến khi nổi lên mặt nước (tức $z=0$).

Tại thời điểm xác định vị trí *B*, một trực thăng rời khỏi tàu 1, bay thẳng đứng lên tới độ cao 1100 m (vị trí R), rồi hướng thẳng tới vị trí nổi W của tàu ngầm. Vận tốc của trực thăng là $20m/s$. Tính thời gian bay của trực thăng để đến W là bao nhiêu giây?

Câu 50. Trong một cảnh dựng phim có một ngôi nhà, mái nhà là một hình chóp tứ giác đều với đáy là hình vuông có các đỉnh: $A(6;4;2)$, $B(6;6;2)$, $C(4;6;2)$, $D(4;4;2)$ và đỉnh chóp là S. Chiều cao của hình chóp mái là 2 m.



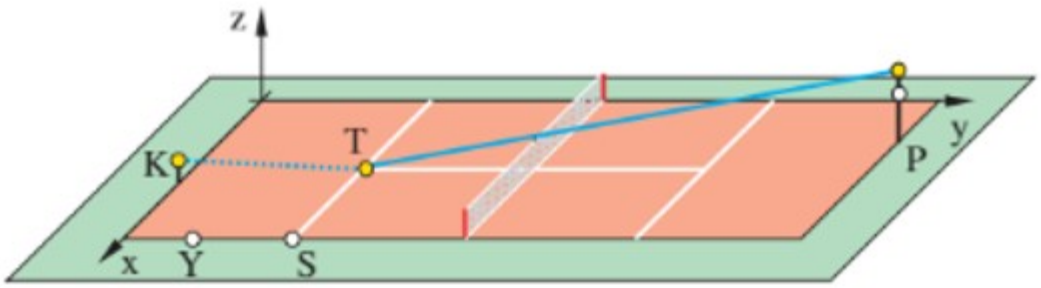
Một đèn chiếu tại $L(5;10;2)$ chiếu sáng ngôi nhà từ phía bên phải.

Trong mặt phẳng xOz có một tấm màn, trên đó sẽ xuất hiện bóng của ngôi nhà.

Biết rằng các đỉnh B, C và S có các điểm chiếu lần lượt là: B' và C' và S'

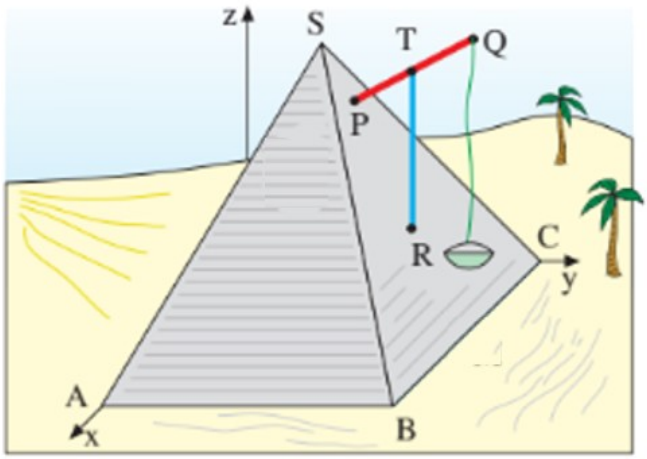
Tính $S'B'+S'C'$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Câu 51. Sân quần vợt được mô hình hóa lý tưởng, có chiều dài 24 m và chiều rộng 10 m. Các ô giao bóng dài 6 m và rộng 5 m. Lưới cao liên tục 1 m. Mọi cú đánh đều bay theo đường thẳng.

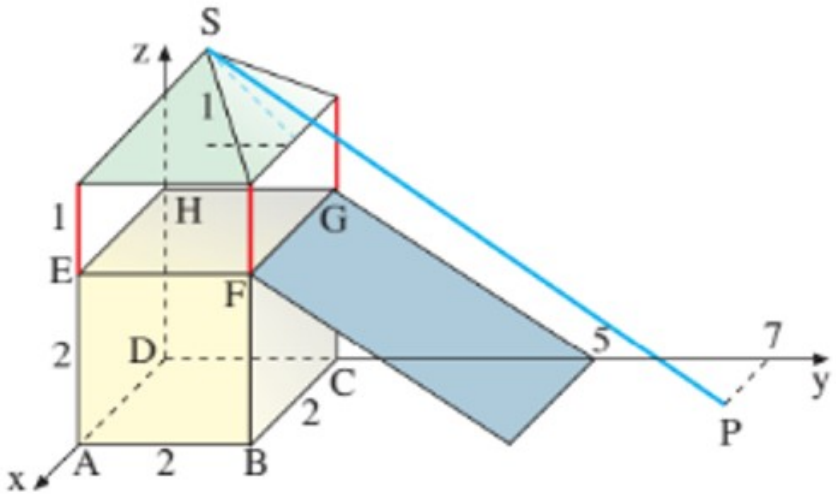


Một vận động viên đứng ở vạch cuối sân tại điểm $P(3;24;0)$ và cố gắng đánh quả bóng với vận tốc 144 km/h ở độ cao $3{,}10\,m$ sao cho bóng rơi đúng vào điểm $T(5;6;0)$ của ô giao bóng. Sau khi chạm đất, bóng phản xạ theo góc α (giữ nguyên vận tốc, không đổi hướng ngang). Tại vị trí K trên vạch cuối sân bên kia đối thủ sẽ đánh trả, hãy tính thời gian đối thủ có để phản ứng là bao nhiêu giây? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Câu 52. Một kim tự tháp cổ có các đỉnh $A(100;0;0), B(100;100;0), C(0;100;0), D(0;0;0)$ và đỉnh $S(50;50;100)$. Từ mặt bên BCS nhô ra một thanh PQ thẳng đứng (là một phần của cơ cấu nâng), trung điểm T của thanh PQ được đỡ bởi cột thẳng đứng RT. Biết $P(50;60;80), Q(50;100;100)$.Tính chiều dài cột TR.



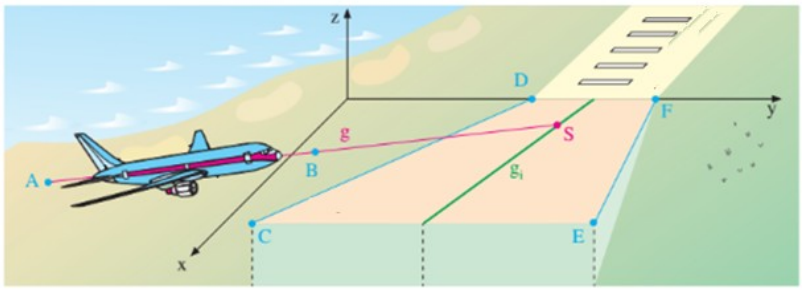
Câu 53. Tháp gồm một khối lập phương, trên đó gắn thêm một khung hộp chữ nhật, và phía trên là một khối chóp tứ giác đều. Tại độ cao bằng chiều cao khối lập phương, có gắn một mặt phẳng trượt hình chữ nhật (xem hình, các kích thước tính bằng mét).



Từ đỉnh S có buộc một sợi dây xuống điểm $P(1;7;0)$ làm dây leo.

Trên mặt phẳng trượt, có một đứa trẻ đứng thẳng tại vị trí chính giữa tấm trượt và với thẳng tay (vuông góc với mặt đất) nắm được dây leo. Tính chiều cao tay vịn của đứa trẻ tính từ mặt đất.

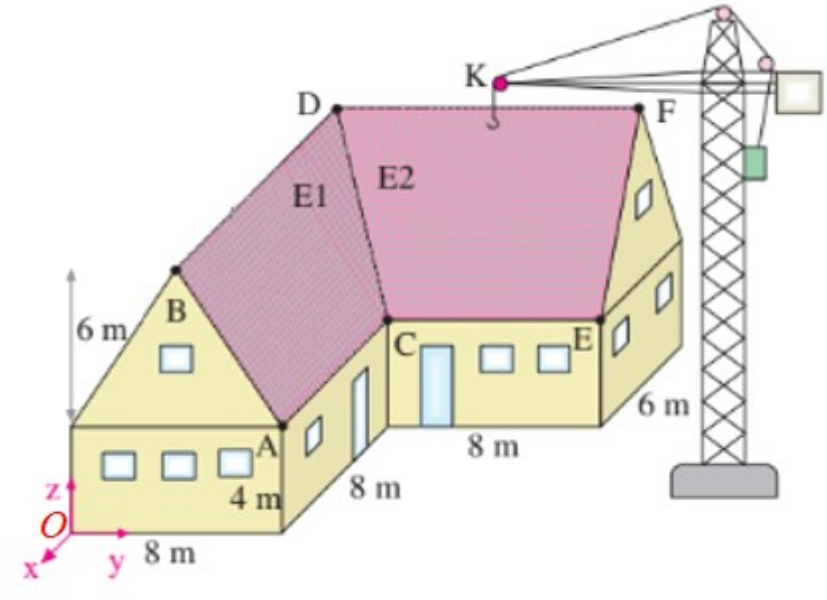
Câu 54. Một máy bay đang trong giai đoạn tiếp cận để hạ cánh. Nó bay theo đường thẳng g đi qua hai điểm $A(25;2;5)$ và $B(15;7;3)$.



Khu vực tiếp cận hạ cánh được giới hạn bởi hai đường thẳng g_1 và g_2, lần lượt đi qua các điểm $C(10;4;2), D(0;10;0)$ và $E(10;20;2), F(0;14;0)$ (các số đo tính bằng km).

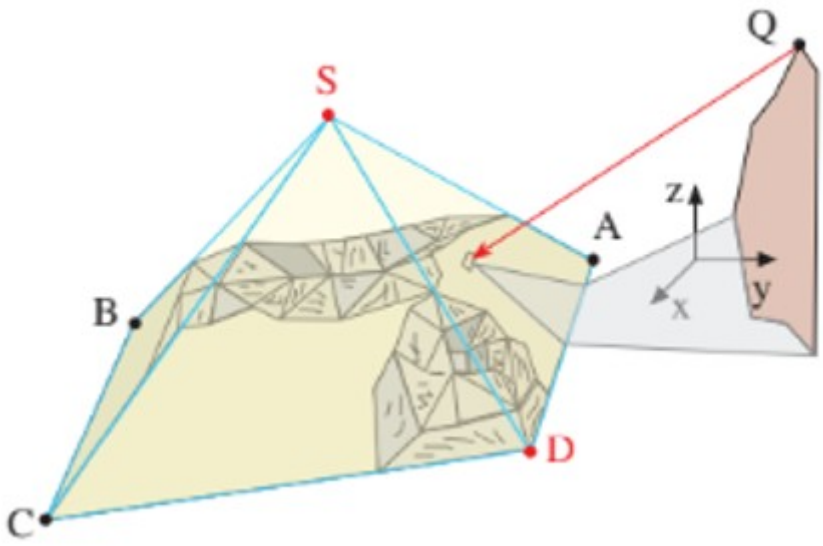
Đường thẳng g_i đi ở giữa khu vực tiếp cận được coi là đường lý tưởng cho hạ cánh. Xác định phương trình g_i. Đường bay g của máy bay cắt đường g_i tại S. Biết vận tốc của máy bay là $500 km/h$. Tính thời gian từ khi máy bay ở điểm A cho đến khi chạm đường lý tưởng g_i là bao nhiêu giây? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Câu 55. Một ngôi nhà góc có kích thước như hình bên.



Đầu tay cần cẩu có tọa độ $K(11;12;26)$. Từ đó kéo một sợi dây tới mái E_2 và xoay qua tiếp tục kéo một sợi dây khác với mái E_1. Tính tổng chiều dài tối thiểu các sợi dây đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Câu 56. Các điểm $A(0;-1;0), B(1;-4;0)$ và $C(4;-3;0)$ là các đỉnh thu được của đáy một kim tự tháp khối chóp tứ giác đều, đã bị sụp một phần và cần được phục dựng. Mỗi đơn vị trong hệ tọa độ ứng với 100 m.



Gọi tâm M của hình vuông và tọa độ đỉnh D còn thiếu. Trên đỉnh M theo phương thẳng đứng là đỉnh S của kim tự tháp, với chiều cao 200 m. Theo mô tả, ánh sáng mặt trời vuông góc với mặt bên DAS chiếu qua điểm $Q\left(\frac{1}{2};\frac{5}{3};\frac{7}{2}\right)$ vào một lối vào bí mật của kim tự tháp. Xác định được tọa độ điểm $P(a;b;c)$ là vị trí ban đầu của lối vào bí mật này. Tính $2a+3b+c$

Câu 57. Tháp đôi Puerta de Europa, Tây Ban Nha có mặt tiền nghiêng, được mô hình hóa bởi mặt phẳng $(P): x-y+z+1=0$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị mét). Chủ tòa nhà muốn treo một biển quảng cáo lên mặt tường này, nhưng vì vị trí có cửa sổ thông gió nên phải dùng cơ cấu giàn giáo như sau:

1. Khoan lỗ và cắm thanh sắt

- Khoan hai lỗ trên tường, cắm vào đó hai thanh sắt cố định sao cho đầu mút của mỗi thanh nhô ra phía ngoài.

- Gọi hai đầu mút lần lượt là điểm A và điểm B, với tọa độ $A(1;-2;0), B(2;1;-1).$

2. Nối khung ngang

- Hàn một thanh sắt ngang nối từ A đến B. Đây là thanh chịu lực chính để treo biển.

3. Gắn biển quảng cáo

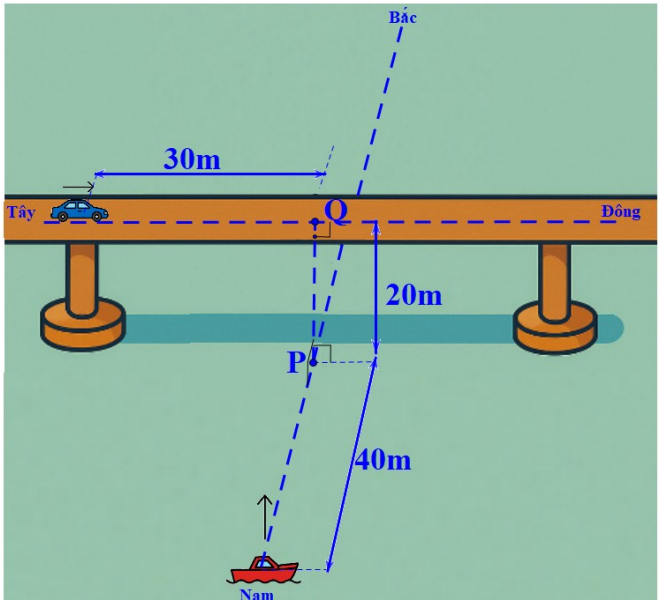
- Hàn khung biển vào thanh ngang, xem biển như một tấm bản mỏng nằm trên cùng mặt phẳng (Q).

Để biển áp sát tường nhất - vừa tăng tính thẩm mỹ, vừa giảm lực gió - ta cần điều chỉnh sao cho góc θ giữa mặt phẳng biển (Q) và mặt phẳng tường (P) là nhỏ nhất.

Giả sử phương trình tổng quát của biển hiệu là $(Q): ax+by+cz+d=0, (a;b;c;d\in\square)$.

Hãy tính tổng $a+b+c+d$

Câu 58. Một chiếc thuyền đang chuyển động đều với vận tốc 10 m/s theo hướng từ Nam lên Bắc trên mặt hồ. Trên cây cầu nằm cách mặt hồ 20m theo phương thẳng đứng, có một chiếc ô tô chuyển động đều với vận tốc 20m/s theo hướng từ Tây sang Đông.



Như hình vẽ, tại thời điểm hiện tại, thuyền ở vị trí cách điểm P (*nằm dưới cầu*) 40 m theo phương Nam, còn ô tô ở vị trí cách Q (*trên cầu*) 30 m theo phương Tây.

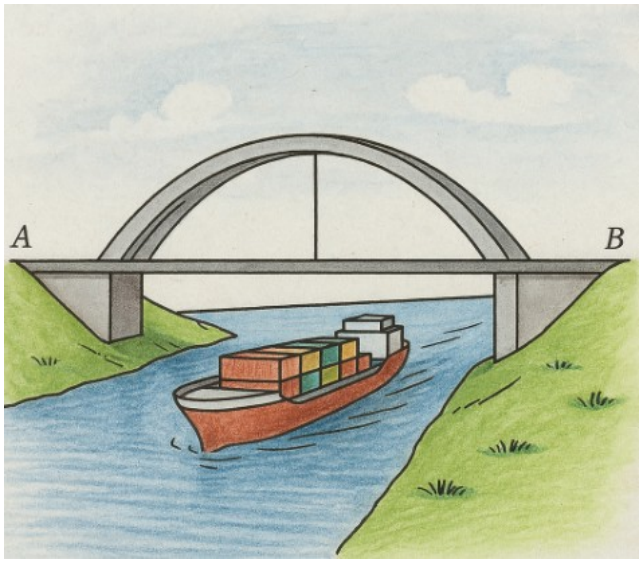
(Bỏ qua kích thước của thuyền và ô tô; đoạn thẳng PQ luôn vuông góc với hướng chuyển động của cả thuyền và ô tô)

Hỏi: Khoảng cách giữa thuyền và ô tô đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu mét?

Câu 59. Một cây cầu được thiết kế theo dạng parabol đối xứng, bắc ngang con sông. Trong đó:
- Dòng sông chảy theo trục Ox, mặt nước sông nằm trong mặt phẳng $z=0$,

- Cầu nằm trong mặt phẳng yOz, nối từ: $A(0;-5;0)$ (bờ trái sông) đến $B(0;5;0)$ (bờ phải sông)

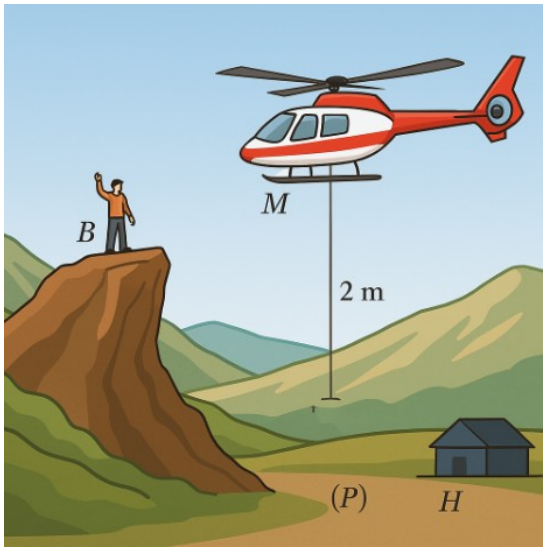
- Cầu có dạng parabol đối xứng qua trục Oz, với đỉnh tại $H(0;0;h)$



- Trên sông có tàu container cao 6 mét, thân tàu rộng 4 mét và cần ít nhất 1 mét khoảng trống chiều cao an toàn, tức yêu cầu chiều cao cầu tối thiểu là 7 mét tại đoạn giữa sông từ $y=-2$ đến $y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của h để đảm bảo chiều cao cầu từ $y=-2$ đến $y=2$ luôn lớn hơn hoặc bằng 7 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

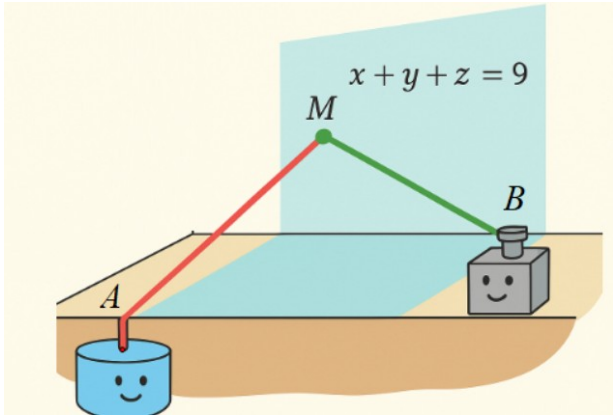
Câu 60. Một vùng núi được mô phỏng bằng mặt phẳng địa hình: $(P):\ x+2y-z=0$
Một người bị nạn đang đứng tại điểm $B(2;1;6)$ không nằm trên mặt đất, mà đứng trên một mỏm đá cao.

Một trực thăng xuất phát từ căn cứ tại điểm $H(1082;-809;1624)$, bay theo đường thẳng hướng đến người bị nạn. Tuy nhiên, để đảm bảo an toàn, trực thăng chỉ được phép dừng lại tại một điểm M trên đường bay, sao cho: M cách mặt phẳng địa hình (P) đúng 2 mét. Sau đó từ điểm M (trong đó hoành độ, tung độ và cao độ được làm tròn đến hàng phần trăm), trực thăng thả cáp cứu hộ hỗ trợ người bị nạn



Hãy **tính độ dài đoạn bay** từ căn cứ H đến điểm tiếp cận M (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

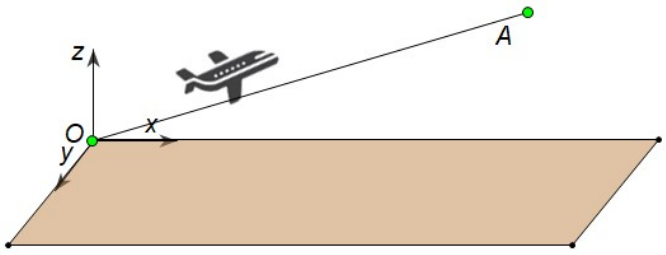
Câu 61. Một nhà máy cần nối một đường ống nước thẳng từ **bồn chứa tại điểm** $A(0;0;0)$ đến **máy xử lý đặt tại điểm** $B(4;3;1)$. Do địa hình bị chắn giữa hai điểm, đường ống bắt buộc phải đi **qua một điểm** M nằm trên mặt phẳng: $(P): x+y+z=9$ rồi mới đến điểm B.



Biết rằng hệ trục tọa độ $Oxyz$ được gắn trong mô hình nhà máy với mỗi đơn vị tương ứng 1 mét. Hỏi chiều dài ống nước nhỏ nhất mà nhà máy cần nối bằng bao nhiêu mét?

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Một máy bay cất cánh tại một sân bay, sau khi bắt đầu cất cánh trong thời gian ngắn máy bay sẽ bay theo một đường thẳng và sân bay nơi máy bay cất cánh được coi là một mặt phẳng. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 km. Biết rằng, máy bay bắt đầu cất cánh tại điểm $O(0;0;0)$ và sau một thời gian ngắn máy bay bay đến điểm $A(2;5;1,2)$ và sân bay máy bay cất cánh nằm trên mặt phẳng (Oxy). Góc tạo bởi đường bay của máy bay cất cánh và sân bay bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ là độ)?



Lời giải

Đáp số: 14.

Dựa vào đề bài ta có thể thấy góc tạo bởi đường bay của máy bay cất cánh và sân bay chính là góc của $\overrightarrow{OA}$ và mặt phẳng (Oxy).

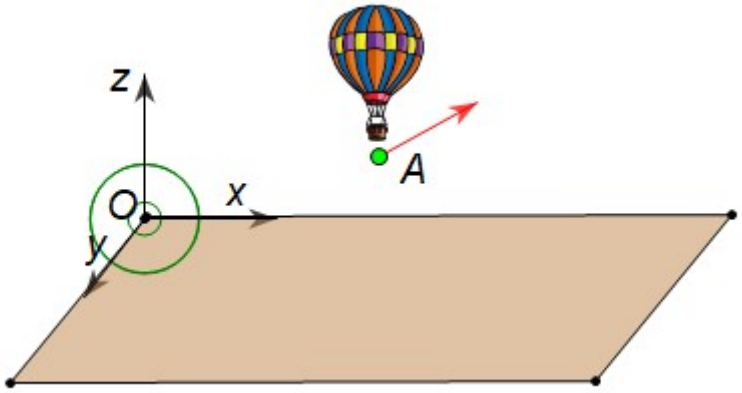
Ta có: $\overrightarrow{OA}=(2;5;1,2)$ và véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) là $\vec{n}=\vec{k}=(0;0;1)$.

Gọi α là góc tạo bởi $\overrightarrow{OA}$ và mặt phẳng (Oxy), suy ra:

$$\sin\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{OA}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\vec{k}\right|}=\frac{|1,2.1|}{\sqrt{2^2+5^2+(1,2)^2}.\sqrt{1^2}}=\frac{6\sqrt{761}}{761}.$$

Suy ra $\alpha\approx 14^\circ$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, một khinh khí cầu ở tọa độ $A(-16;-10;10)$ bắt đầu bay với vectơ vận tốc không đổi $\vec{v}=(4;3;-1)$ (đơn vị vận tốc là km/h) và dự kiến bay trong thời gian 10 giờ. Biết trạm kiểm soát không lưu đặt ở vị trí gốc tọa độ O kiểm soát được các vật thể cách trạm một khoảng tối đa bằng 12km. Thời gian kể từ khi trạm kiểm soát không lưu phát hiện ra khinh khí cầu đến khi khinh khí cầu ra khỏi vùng kiểm soát là bao nhiêu phút?



Lời giải

Đáp án: 240.

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A(-16;-10;10)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v}=(4;3;-1)$ là: $\begin{cases}x=-16+4t\\y=-10+3t\\z=10-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

Gọi B là vị trí của khinh khí cầu mà trạm kiểm soát có thể kiểm soát được $\Rightarrow OB \le 12$

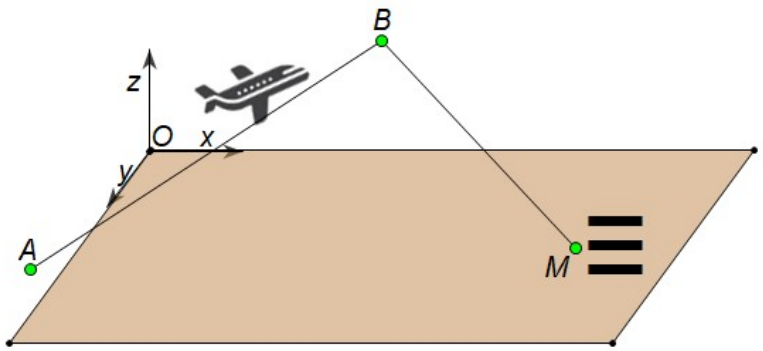
Vì $B \in d \Rightarrow B(-16+4t;-10+3t;10-t)$

$$\Rightarrow \sqrt{(-16+4t)^2+(-10+3t)^2+(10-t)^2} \le 12 \Leftrightarrow 26t^2-208t+312 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le t \le 6$$

$$\left.\begin{array}{l} t=2 \Rightarrow B_1(-8;-4;8) \\ t=6 \Rightarrow B_2(8;8;4) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{B_1B_2}=(16;12;-4)$$

Khinh khí cầu bị phát hiện ra khi di chuyển từ B_1 đến B_2. Ta thấy $\overrightarrow{B_1B_2}=4\vec{v}$ nên thời gian từ khi trạm kiểm soát không lưu phát hiện ra khinh khí cầu đến khi khinh khí cầu ra khỏi vùng kiểm soát là 4h = 240 phút.

Câu 3. Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(5;\ 0;\ 5)$ đến vị trí $B(10;\ 10;\ 3)$ và hạ cánh tại vị trí $M(a;\ b;\ 0).$ Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu (viết kết quả dưới dạng số thập phân)?



Lời giải

Đáp án: $42,5$.

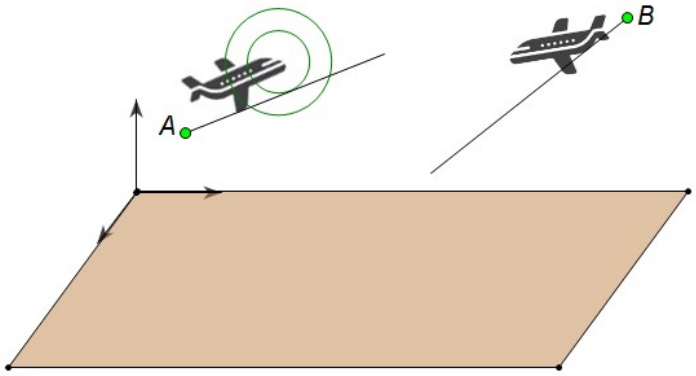
Phương trình đường thẳng AB là: $\dfrac{x-5}{5}=\dfrac{y}{10}=\dfrac{z-5}{-2}.$

Vì M thuộc AB nên tồn tại số thực t sao cho $M(5t+5;\ 10t;\ -2t+5).$

Ngoài ra, M thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $-2t+5=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2}.$

Suy ra $M(17,\ 5;\ 25;\ 0).$ Vậy $a+b=17,5+25=42,5.$

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mỗi đơn vị trên hệ trục ứng với 10 km, trạm kiểm soát không lưu đang theo dõi hai máy bay. Máy bay thứ nhất ban đầu ở tọa độ $A(25;-10;1)$ và bay theo hướng vecto $\vec{v_1}=(-3;-4;0)$ với tốc độ không đổi là 750 km/h. Máy bay thứ hai ban đầu ở tọa độ $B(30;-25;1,1)$ và bay theo hướng vecto $\vec{v_2}=(-4;3;0)$ với tốc độ không đổi là 900 km/h. Trên máy bay thứ nhất có gắn radar tránh va chạm với bán kính hoạt động là 50 km. Hỏi thời gian máy bay thứ hai xuất hiện trên màn hình của radar máy bay thứ nhất là bao nhiêu phút (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Lời giải

Đáp án: $4,91$.

Máy bay 1: $\overrightarrow{v_1} = (-3;-4;0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_1}\right| = 5$

Vectơ chỉ phương của máy bay 1 là $\left(-\frac{3.750}{5};-\frac{4.750}{5};0\right) = (-450;-600;0)$.

Máy bay 2: $\overrightarrow{v_2} = (-4;3;0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_2}\right| = 5$.

Vectơ chỉ phương của máy bay 2 là $\left(-\frac{4.900}{5};\frac{3.900}{5};0\right) = (-720;540;0)$.

Phương trình đường thẳng máy bay 1 là $\begin{cases} x = 250 - 450t \\ y = -100 - 600t \\ z = 10 \end{cases}$.

Phương trình đường thẳng máy bay 2 là $\begin{cases} x = 300 - 720t \\ y = -250 + 540t \\ z = 11 \end{cases}$.

Khoảng cách giữa hai máy bay tại thời điểm t là $MN = \sqrt{(50-270t)^2 + (-150+1140t)^2 + 1}$.

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán $MN \le 50 \Rightarrow 1372500t^2 - 369000t + 22501 \le 0$

$\Leftrightarrow 0,09348 \le t \le 0,17537$.

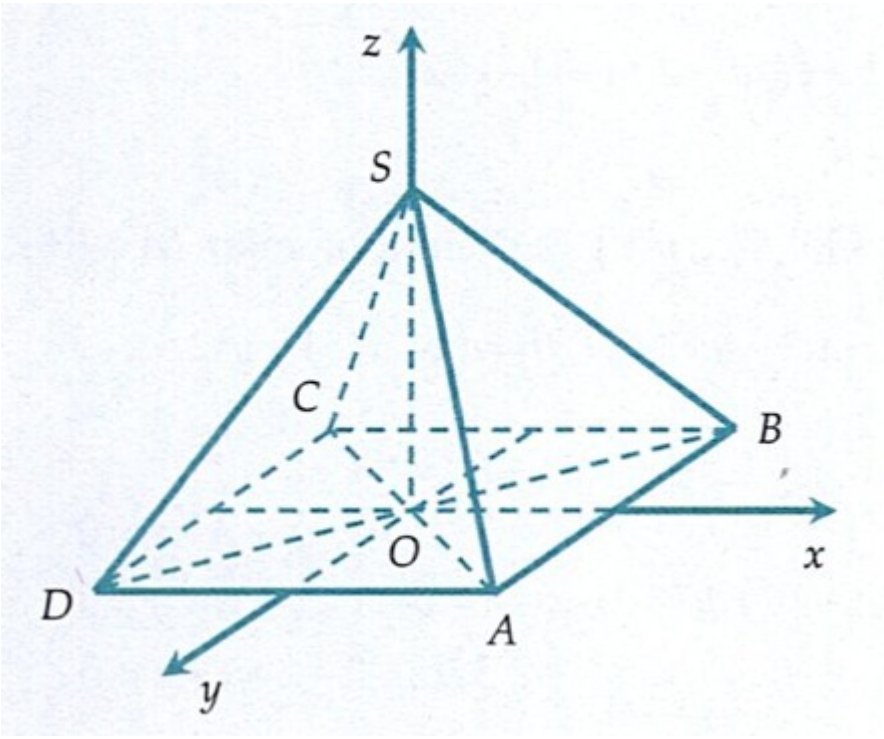
Vậy thời gian máy bay thứ hai xuất hiện trên màn hình radar của máy bay thứ nhất là

$0,08189 \times 60 \approx 4,91$ phút.

Câu 5. Kim tự tháp Giza ở Ai Cập có dạng một hình chóp tứ giác đều. Biết rằng cạnh đáy của kim tự tháp dài 230 m và chiều cao của kim tự tháp là $146,6m$. Tính độ dốc của mặt bên kim tự tháp so với mặt phẳng nằm ngang (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Minh họa kim tự tháp Giza bằng hình chóp tứ giác $S.ABCD$ như hình dưới.



$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác với đáy là hình vuông, có tọa độ các đỉnh là $A(13;13;0), B(13;-13;0), C(-13;-13;0), D(-13;13;0), S(0;0;14,66)$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{SA}=(13;13;-14,66), \overrightarrow{SB}=(13;-13;-14,66)$.

Suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAB) là $\vec{n}=(14,66;0;13)$. Do đó góc α giữa (SAB) và Oxy được xác định bởi: $\cos\alpha=\dfrac{|0\cdot 14,66+0.1+1.13|}{\sqrt{1^2}\cdot\sqrt{14,66^2+13^2}}\approx 0,66$.

Suy ra $\alpha\approx 49^\circ$.

Đáp án: 49.

Câu 6. Một phần mềm mô phỏng vận động viên tập bắn bia mục tiêu có kích thước nhỏ $(42\,\text{cm}\times 42\,\text{cm})$ trong không gian $Oxyz$ (giả sử $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1\,\text{cm}$). Cho biết vận động viên đó sử dụng thước ngắm 3 và đứng cách xa bia mục tiêu là 100 m, trục d của nòng súng và cọc đỡ bia d' lần lượt có phương trình $d:\begin{cases}x=t\\y=2\\z=4\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=1\\y=2\\z=1+3t'\end{cases}$. Để bắn trúng hồng tâm (thang

điểm 10) thì vận động viên phải ngắm bắn vào điểm $N(a;b;c)\in d'$ và cách giao điểm của d và d' một khoảng 6 cm. Khi $c<0$, tính giá trị biểu thức $2a-b+3c$.

Lời giải

Đáp án: -6.

Gọi I là giao điểm của d và d'. Giải hệ $\begin{cases}t=1\\2=2\\4=1+3t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t'=1\end{cases}\Rightarrow I(1;2;4)$.

Vì $N(a;b;c)\in d'\Rightarrow N(1;2;1+3t')$ và N cách giao điểm I một khoảng 6 cm nên $IN=6$

$\Leftrightarrow\sqrt{(1-1)^2+(2-2)^2+(3t'-3)^2}=6$

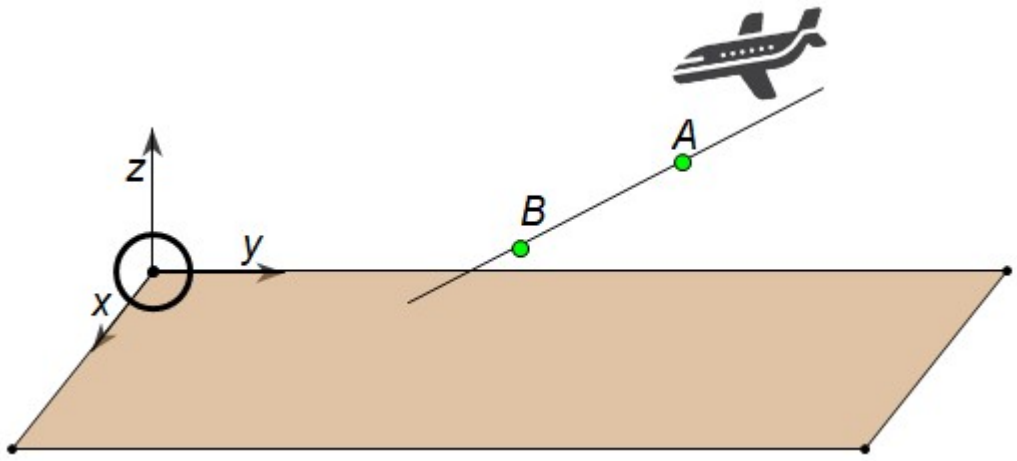
$\Leftrightarrow|3t'-3|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3t'-3=6\\3t'-3=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t'=3\\t'=-1\end{array}\right.$.

Với $t'=3\Rightarrow N(1;2;10)$ (không thỏa yêu cầu đề bài).

Với $t'=-1\Rightarrow N(1;2;-2)$ (thỏa yêu cầu đề bài).

Vậy $a=1$; $b=2$; $c=-2\Rightarrow 2a-b+3c=2.1-2+3.(-2)=-6$.

Câu 7. Xét trong không gian $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay đặt ở gốc toạ độ $O(0;0;0)$, đơn vị trên mỗi trục là ki-lô-mét. Một máy bay chuyển động theo đường thẳng, bay qua hai vị trí $A(-500;-300;500)$ và $B(-200;-200;450)$. Khi máy bay ở gần đài kiểm soát không lưu nhất, toạ độ máy bay là $(a;b;c)$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.



Lời giải

Đáp án: 400.

Máy bay chuyển động theo đường thẳng Δ đi qua hai điểm A,B nên sẽ ở gần đài kiểm soát không lưu nhất khi nó ở vị trí H là hình chiếu vuông góc của gốc O lên đường thẳng Δ.

+ Đường thẳng Δ đi qua A,B nên có VTCP là $\overrightarrow{AB}(300;100;-50)$ do đó phương trình tham số là $\begin{cases} x=-500+6t \\ y=-300+2t \\ z=500-t \end{cases}$.

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên Δ thì $H(-500+6t;-300+2t;500-t)\Rightarrow \overrightarrow{OH}(-500+6t;-300+2t;500-t)$, khi đó

$OH\perp\Delta$ nên $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow 300(-500+6t)+100(-300+2t)-50(500-t)=0$

$\Leftrightarrow t=100$, suy ra $H(100;-100;400)$.

Vậy $P=a+b+c=400\ (km)$.

Câu 8. Khi khắc phục hậu quả của thiên tai, bão lũ, một trong những giải pháp nhằm tiếp tế hàng cứu trợ đến những nơi khó tiếp cận là sử dụng flycam để xác định vị trí chính xác của người cần cứu trợ, sau đó sử dụng drone để vận chuyển các vật dụng thiết yếu thả xuống cho người này, giúp họ có thể cầm cự trong khi chờ đợi lực lượng cứu hộ đến nơi. Hai chiếc drone làm nhiệm vụ chuyển hàng cứu trợ bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất bay đến điểm cách điểm xuất phát 2,5*km* về phía nam và 1,5*km* về phía đông, đồng thời cách mặt đất 60*m*. Chiếc thứ hai bay đến điểm cách điểm xuất phát 3*km* về phía bắc và 2,5*km* về phía tây, đồng thời cách mặt đất 40*m*.Trong không gian, xét hệ tọa độ $Oxyz$ với gốc tọa độ O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc drone, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là mặt phẳng). Giả sử trong trường hợp khẩn cấp cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu và các vật dụng cứu trợ cho hai drone sao cho tổng khoảng cách từ vị trí tiếp nhiên liệu tới hai drone nhỏ nhất. Vị trí cần tìm cách gốc tọa độ $a\ km$ theo hướng bắc và $b\ km$ theo hướng tây. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $1,7$.

Ta có: $60m=0,06km;\quad 40m=0,04km$

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai drone, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo *km*.

Chiếc drone thứ nhất bay đến điểm $A(2,5;1,5;0,06)$, chiếc drone thứ hai bay đến điểm $B(-3;-2,5;0,04)$

Gọi $C(x;y;0)$ là vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu và các vật dụng.

Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) là $A'(2,5;1,5;-0,06)$. Khi đó: $AC+CB=A'C+CB$

Vì A',C,B khác phía so với (Oxy) nên $A'C+CB$ nhỏ nhất khi A',C,B thẳng hàng.

$\Rightarrow C=A'B\cap(Oxy)$

Ta có $\overrightarrow{BA'}=(5,5;4;-0,1)$

Phương trình đường thẳng $BA':\begin{cases}x=-3+5,5t\\y=-2,5+4t\\z=0,04-0,1t\end{cases}$

Phương trình mặt phẳng $(Oxy):\ z=0$

Giao điểm của $A'B$ với (Oxy) là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=-3+5,5t\\y=-2+4t\\z=0,04-0,1t\\z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\dfrac{2}{5}\\x=-\dfrac{4}{5}\\y=-\dfrac{9}{10}\\z=0\end{cases}$

$\Rightarrow C\left(-\dfrac{4}{5};-\dfrac{9}{10};0\right)$

Suy ra $a=\dfrac{4}{5};b=\dfrac{9}{10}\Rightarrow a+b=\dfrac{17}{10}=1,7$.

Câu 9. Đường ống dẫn trên không là hệ thống đường ống được treo trên các giá đỡ hoặc cột cao, dùng để vận chuyển dầu thô hoặc các sản phẩm dầu mỏ từ nơi này đến nơi khác mà không cần chôn dưới lòng đất. Hệ thống này thường được sử dụng trong các khu vực có địa hình khó khăn, vùng băng giá, rừng rậm,… những nơi mà việc đào đường ống ngầm không khả thi.

Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là mét, người ta thiết lập một đường ống dẫn dầu trên không dọc theo đường thẳng $d:\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=16 \end{cases}$ $(t$ là tham số). Vì địa hình phức tạp, người ta đành chọn điểm $A(12;10;15)$ cạnh vách núi để làm điểm trung chuyển từ mặt đất (mặt phẳng Oxy) đến đường ống này. Dựa vào kinh nghiệm của mình họ phải chọn vị trí B thuộc đường ống và vị trí C thuộc mặt đất sao cho tổng độ dài các đoạn đường AB, BC, AC là bé nhất, tìm giá trị bé nhất đó theo đơn vị mét, làm tròn đến hàng phần chục.

Lời giải

Đáp án: $42,6$.

Vì điểm $A(12;10;15)$ và đường thẳng d cố định, nên khoảng cách từ A đến d không đổi

Vậy khoảng cách từ điểm A đến điểm B nhỏ nhất bằng khoảng cách từ A đến đường thẳng d.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d, (α) nhận $\vec{n}=(1;0;0)$ làm vectơ pháp tuyến (α): $x-12=0$

Khi đó B là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow B(12;0;16)$

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow A'(12;10;-15)$ và $CA=CA'$

Ta có $AB+AC+BC=AB+BC+A'C$

Để tổng độ dài các đoạn đường AB, BC, AC là bé nhất $\Rightarrow B, C, A'$ thẳng hàng $\Rightarrow AB+BC+A'C=AB+BA'$

Mà $\overrightarrow{AB}(0;-10;1); \overrightarrow{BA'}(12;10;-15)$

$\Rightarrow AB+BC+A'C=AB+BA'=\sqrt{10^2+31^2}+\sqrt{10^2+1^2} \approx 42,6$

Câu 10. Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh.

Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $A(3;2,5;15)$ và $B(21;27,5;10)$. Khi du khách khi ở độ cao 12 mét thì tọa độ của du khách lúc đó là $M(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Lời giải

Đáp án: $43,3$.

Phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline là đường thẳng AB.

Ta có: $A(3;2,5;15)$, $B(21;27,5;10) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(18;25;-5)$

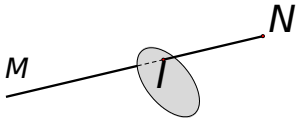
Phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline là $\begin{cases} x=3+18t \\ y=2,5+25t \\ z=15-5t \end{cases} \ (t\in\mathbb{R})$.

Khi du khách khi ở độ cao 12 mét $\Rightarrow z=12 \Rightarrow 15-5t=12 \Rightarrow t=\dfrac{3}{5}$

Thay $t=\dfrac{3}{5}$ vào phương trình đường thẳng AB ta được $\begin{cases} x=13,8 \\ y=17,5 \\ z=12 \end{cases} \Rightarrow M(13,8;17,5;12)$

Vậy $T=a+b+c=13,8+17,5+12=43,3$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, mắt một người quan sát đặt tại điểm $M(1;2;3)$ và vật cần quan sát đặt tại điểm $N(2;3;-12)$. Một tấm bìa cứng có dạng hình tròn thuộc mặt phẳng Oxy tâm đặt tại gốc tọa độ, bán kính R che khuất tầm nhìn của người quan sát. Khi đó bán kính của tấm bìa nhỏ nhất là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Lời giải

Đáp án: $2,51$.

Giả sử người quan sát không nhìn thấy vật khi và chỉ khi người quan sát không nhìn thấy điểm N, hay tấm bìa cứng che khuất điểm N. Khi đó, đoạn thẳng MN cắt tấm bìa cứng tại điểm I thuộc mặt phẳng Oxy.

Phương trình đường thẳng $MN:\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3-15t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$

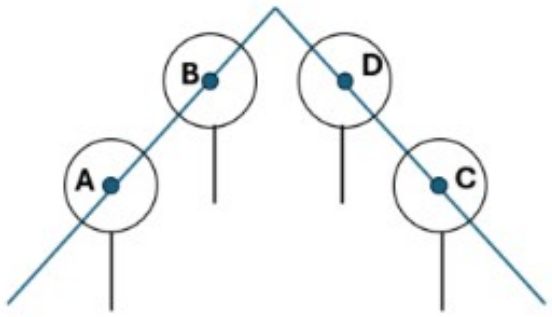
$$I=MN\cap Oxy: z=0\Rightarrow t=\frac{1}{5}\Rightarrow I\left(\frac{6}{5};\frac{11}{5};0\right).$$

Vì $z_M.z_N=-36<0$ nên M,N nằm về hai phía của I hay tấm bìa có thể che khuất vật.

Mặt khác, tấm bìa hình tròn có tâm là gốc tọa độ nên tấm bìa muốn che khuất vật khi và chỉ khi

$$R\geq OI=\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{11}{5}\right)^2+0^2}=\frac{\sqrt{157}}{5}\approx 2,51.$$

Câu 12. Trong một đợt diễn tập quốc phòng, hai người ở vị trí khác nhau cùng ngắm bắn một mục tiêu cố định trên không. Người ta gắn một hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét), mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất. Người thứ nhất bắn một viên đạn đi qua hai điểm $A(5;7;10)$ và $B(6;9;12)$. Người thứ hai bắn một viên đạn đi qua hai điểm $C(15;17;5)$ và D (điểm D ở độ cao $26\,\text{m}$ so với mặt đất). Biết rằng sau một thời gian rời khỏi nòng súng, hai viên đạn chạm với nhau tại vị trí cách điểm A một khoảng $150\,\text{m}$ (tham khảo hình vẽ)



Hỏi D cách C một khoảng bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.

Lời giải

Đáp số: 28,8

Gọi $E(x;y;z)$ là điểm va chạm của hai viên đạn.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;2;2)\Rightarrow AB=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$.

Theo bài ra, ta có: $AE=150$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AE}$ cùng hướng.

Do đó: $\overrightarrow{AE}=\frac{150}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x-5=50.1\\y-7=50.2\\z-10=50.2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=55\\y=107\\z=110\end{cases}\Rightarrow E(55;107;110)$.

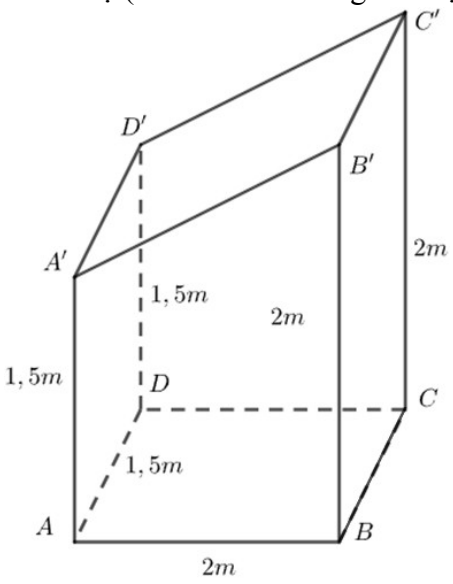
Ta có: $\overrightarrow{CE}=(40;90;105)\Rightarrow\vec{u}=(8;18;21)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng CE.

Phương trình đường thẳng CE là: $\begin{cases}x=15+8t\\y=17+18t\\z=5+21t\end{cases}$.

Theo bài ra ta có: $D(a;b;26)\in CE$, nên: $\begin{cases}a=15+8t\\b=17+18t\\26=5+21t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=23\\b=35\\t=1\end{cases}\Rightarrow D(23;35;26)$.

Vậy $CD=\sqrt{(23-15)^2+(35-17)^2+(26-5)^2}=\sqrt{829}\approx 28,8$.

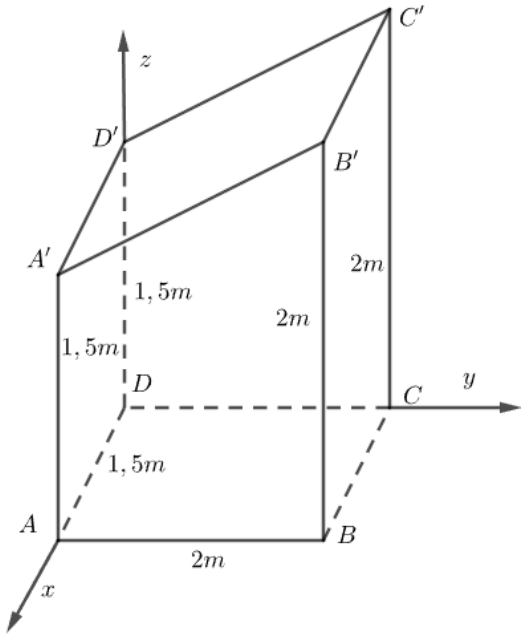
Câu 13. Một hộ gia đình muốn làm chiếc lều như hình vẽ. Đáy nằm trên nền đất phẳng, các cột vuông góc với đáy có chiều cao $AA'=DD'=1,5m$, $BB'=CC'=2m$, đáy là hình chữ nhật có $AB=2m, AD=1,5m$ (Tham khảo hình vẽ minh hoạ). Góc tạo bởi mái nhà và nền nhà là bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Đáp số: 14

Chọn hệ trục như hình vẽ



Khi đó ta có $D(0;0;1,5)$, $A(1,5;0;1,5)$ $B(1,5;2;2)$.

$\overrightarrow{DA}=(1,5;0;0)=1,5(1;0;0)$, $\overrightarrow{DB}=(1,5;2;0,5)=0,5(3;4;1)$.

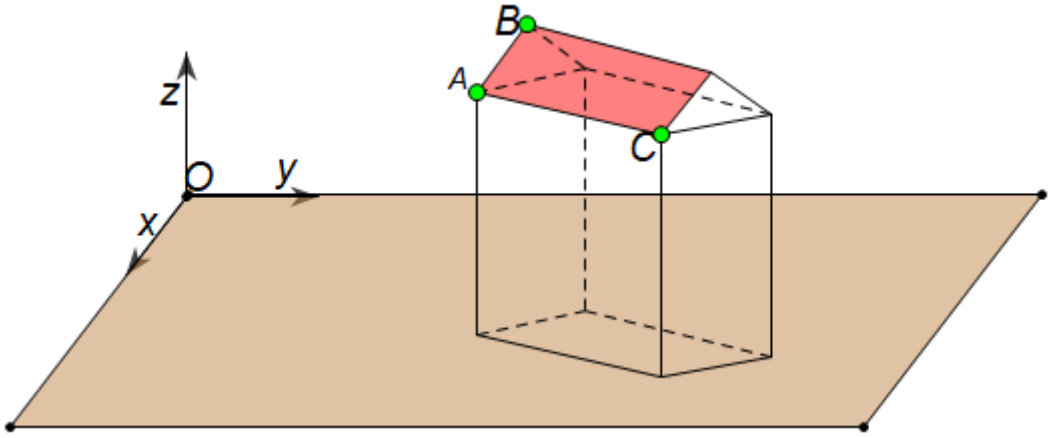
$\left[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right]=(0;-1;-4)=-(0;1;4)$ là vecto pháp tuyến của $(ABCD)$.

Mặt $(ABCD)$ có vecto pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Ta có

$$\cos\left((ABCD),(ABCD)\right)=\frac{|4|}{1.\sqrt{17}}=\frac{4}{\sqrt{17}}\Rightarrow\left((ABCD),(ABCD)\right)\approx 14^{0}$$

Câu 14. Khi gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà sao cho nền nhà thuộc mặt phẳng (Oxy), người ta coi mỗi mái nhà là một phần của mặt phẳng và thấy ba vị trí A,B,C ở mái nhà bên trái lần lượt có toạ độ $(2;0;4),(4;0;3)$ và $(4;9;3)$. Góc giữa mái nhà bên trái và nền nhà bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Đáp án: 27

Ta gọi α là góc giữa mái nhà bên trái và nền nhà.

Khi đó $\alpha = ((ABC);(Oxy))$.

Với (ABC) nhận vectơ $\vec{n} = [\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]$ với $\overrightarrow{AB} = (2;0;-1)$ và $\overrightarrow{AC} = (2;9;-1)$.

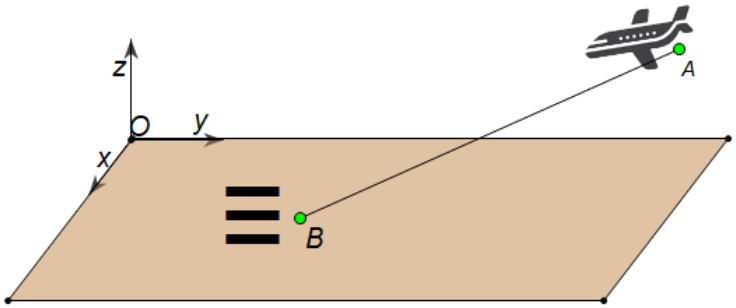
Khi đó $\vec{n} = (9;0;18)$.

Với (Oxy) do $Oz \perp (Oxy)$ nên mặt phẳng (Oxy) nhận $\vec{k} = (0;0;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{k}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{k}|} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Suy ra $\alpha \approx 27^\circ$.

Câu 15. Khi gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilomét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay ở vị trí $A(3;2;-3)$ sẽ hạ cánh tới vị trí $B(8;8;0)$. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Trả lời: 21

Gọi α là góc giữa đường bay và sân bay. Khi đó $\alpha = (AB,(Oxy))$.

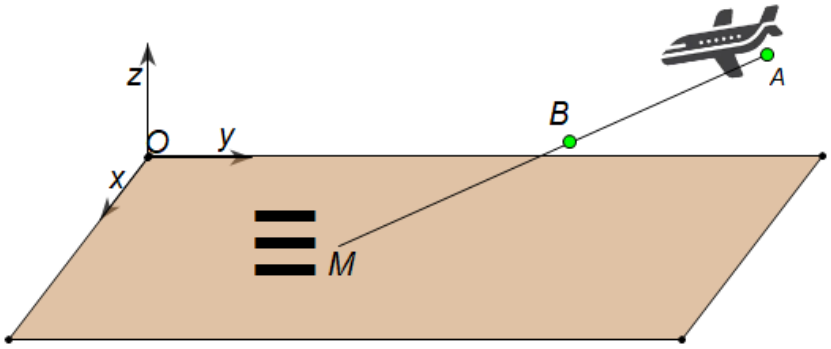
Với đường thẳng AB, nhận vectơ $\overrightarrow{AB} = (5;6;3)$ làm vectơ chỉ phương.

Với (Oxy) do $Oz \perp (Oxy)$ nên mặt phẳng (Oxy) nhận $\vec{k} = (0;0;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Khi đó ta có $\sin\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{k}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{k}|} = \dfrac{3\sqrt{70}}{70}$.

Vậy $\alpha \approx 21^\circ$.

Câu 16. Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(5;0;5)$ đến vị trí $B(10;10;3)$ và hạ cánh tại vị trí $M(a;b;0)$. Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần chục)?



Lời giải

Đáp số: 42,5.

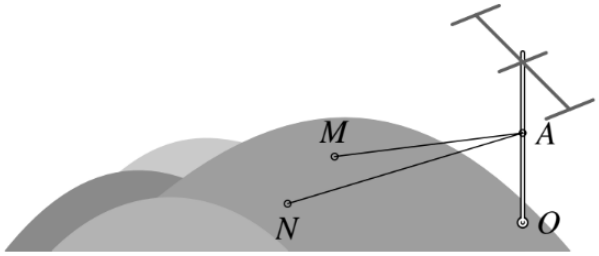
$\overrightarrow{AB}=(5;10;-2)$.

Đường thẳng AB có vecto chỉ phương $\vec{u}=(5;\ 10;\ -2)$ nên có phương trình tham số dạng $AB:\begin{cases}x=5+5t\\y=10t\\z=5-2t\end{cases}$

Vị trí máy bay hạ cánh là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng $(Oxy)\Rightarrow z=0$, ta được $t=\frac{5}{2}\Rightarrow x=\frac{35}{2}=17,5;\ y=25$

Vậy toạ độ điểm $M(17,5;\ 25;\ 0)$ nên $a+b=17,5+25=42,5$.

Câu 17. Người ta muốn dựng một cột ăngten trên một sườn đồi. Ăngten được dựng thẳng đứng trong không gian $Oxyz$ với độ dài đơn vị trên mỗi trục bằng 1m. Gọi O là gốc cột, A là điểm buộc dây cáp vào cột ăngten và M,N là hai điểm neo dây cáp xuống mặt sườn đồi (hình vẽ).



Cho biết tọa độ các điểm nói trên lần lượt là $O(0;0;0),A(0;0;8),M(4;-6;3)$, $N(-4;-3;2)$.

Góc tạo bởi sợi dây cáp MA với mặt phẳng sườn đồi (Làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị độ).

Lời giải

Đáp án: 53

Ta có $\overrightarrow{MA}=(-4;6;5)$, $\overrightarrow{OM}=(4;-6;3),\overrightarrow{ON}=(-4;-3;2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right]=(-3;-20;-36)$.

Mặt phẳng sườn đồi (OMN) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right]=(-3;-20;-36)$.

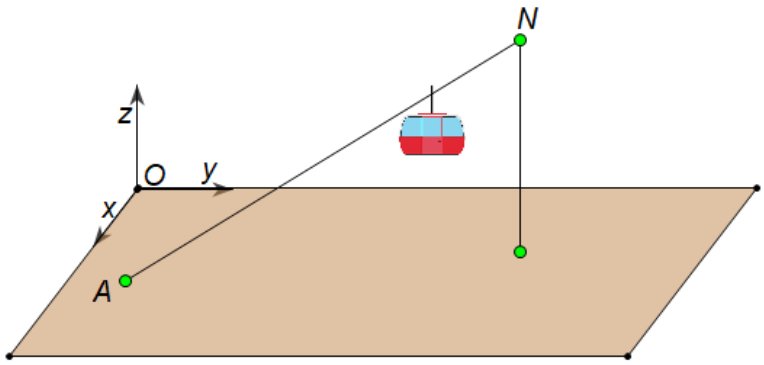
$$\sin\left(MA,(OMN)\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{MA},\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{MA}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MA}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|-4.(-3)+6.(-20)+5.(-36)\right|}{\sqrt{(-4)^2+6^2+5^2}.\sqrt{(-3)^2+(-20)^2+(-36)^2}}$$

Ta có:

$=\frac{288}{\sqrt{131285}}\Rightarrow\alpha\approx 53^\circ$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vecto chỉ phương $\vec{u}=(-8;-6;0)$ với tốc độ là $10\,m/s$ (Đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét).

Giả sử sau $t(s)$ kể từ lúc xuất phát $(t\geq 0)$, cabin đến điểm N. Một người đứng tại điểm $O(0;0;0)$ quan sát cabin chạy trên cáp treo, sau thời gian bao nhiêu giây thì khoảng cách giữa người quan sát và cabin gần nhau nhất (đơn vị giây)?



Lời giải

Đáp án: 0,98

Do tốc độ của cabin là $10\,m/s$ nên độ dài $AN = 10t\,m$.

Do hai véc tơ $\overrightarrow{AN}$ và $\vec{u}$ cùng phương nên $\overrightarrow{AN} = k\vec{u}$ với k là số thực dương nào đó.

Suy ra: $\left|\overrightarrow{AN}\right| = k\left|\vec{u}\right| = k\sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = 10k$.

Suy ra $t = k$, vì thế $\overrightarrow{AN} = k\vec{u} = t\vec{u} = (-8t; -6t; 0)$.

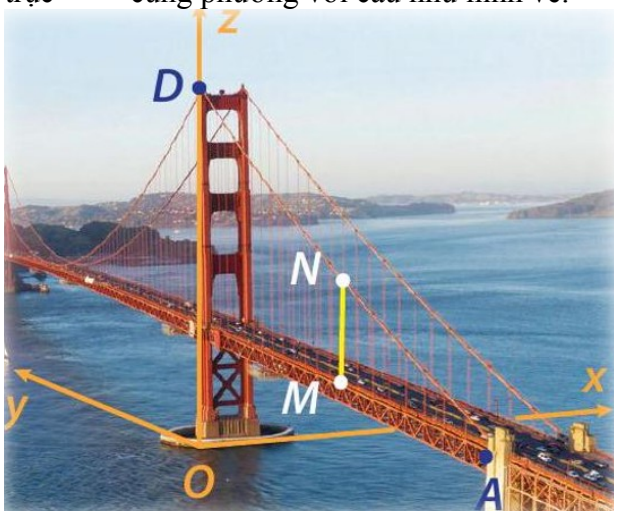
Gọi $N(a;b;c) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = (a-10; b-3; c)$.

Ta có $\begin{cases} a-10 = -8t \\ b-3 = -6t \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10-8t \\ b = 3-6t \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow N(10-8t; 3-6t; 0)$.

Khoảng cách giữa người quan sát và cabin bằng độ dài đoạn $ON = \sqrt{(10-8t)^2 + (3-6t)^2} = \sqrt{100t^2 - 196t + 109}$.

Ta có $100t^2 - 196t + 109$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = \dfrac{196}{2.100} = \dfrac{49}{50} = 0,98\,s$.

Câu 19. Cầu Cổng Vàng *(The Golden Gate Bridge)* ở Mỹ. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ với O là bệ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ.



Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng (Oyz), trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước $326\,m$, điểm A cách mặt nước $82\,m$ và cách trục Oz $352\,m$.Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước $82\,m$ và MN song song với cột trụ. Tính độ dài đoạn MN, biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $250\,m$ (Kết quả làm tròn đến hàng đơn phần chục).

Lời giải

Đáp án: 70,7

Ta có $A\in(Oyz)$ và A cách mặt nước $82\,m$ và cách trục Oz một khoảng $352\,m \Rightarrow A(0;352;82)$.

Điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước $326\,m \Rightarrow D(0;0;326) \Rightarrow \overrightarrow{AD}=(0;-352;244)$.

Phương trình đường thẳng AD là $\begin{cases} x=0 \\ y=-352t \\ z=326+244t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

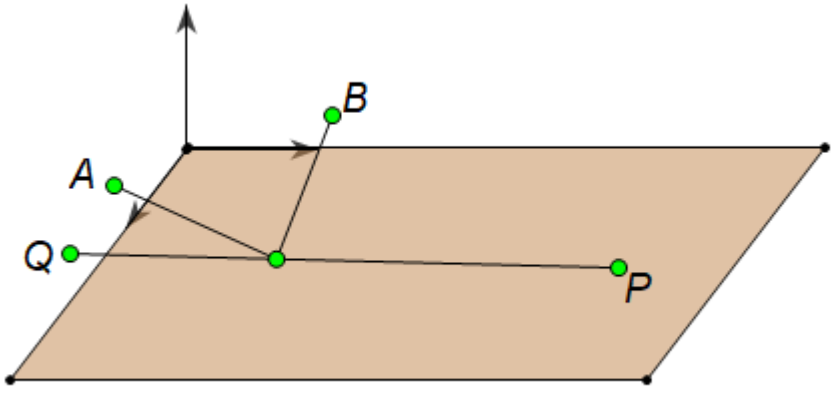
Vì $N\in AD \Rightarrow N(0;-352t;326+244t)$.

Điểm M trên thành cầu, M cách mặt nước $82\,m$ và cách trục Oz một khoảng bằng $250\,m$ nên tọa độ điểm M là $M(0;250;82) \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(0;-352t-250;244+244t)$.

MN song song với cột trụ $\Rightarrow MN\perp Oy \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{j}=0 \Rightarrow -352t-250=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{125}{176}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(0;0;\dfrac{3111}{44}\right) \Rightarrow MN=\dfrac{3111}{44}\approx 70,7\,m$.

Câu 20. Chuẩn bị đến ngày sinh nhật, bạn Bình muốn trang trí căn phòng trọ của mình đẹp hơn. Trước khi trang trí, Bình gắn 2 móc treo vào các vị trí P,Q, rồi căng một sợi dây từ P đến Q. Tiếp theo, bạn gắn 2 móc treo vào các vị trí A và B, sau đó lấy một điểm M nằm giữa đoạn thẳng PQ rồi tiếp tục căng dây từ M đến A và từ M đến B. Xét một hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $P(1;1;0)$, $Q(3;0;1)$ $A(1;0;-1)$, $B(2;1;1)$ đơn vị trên mỗi trục là mét. Khi tổng độ dài các đoạn dây mà Bình sử dụng là ngắn nhất thì khoảng cách từ M đến P bằng bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Lời giải

Đáp án: 0,8.

Cách 1:

Dễ thấy P,Q,A,B cùng thuộc mặt phẳng $(PQA): x+y-z-2=0$ và A,B nằm về hai phía của PQ. Khi đó $AB\cap PQ=M\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ thỏa tổng độ dài các đoạn dây là ngắn nhất.

$PM=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx 0,8$.

Cách 2:

Gọi $(\alpha),(\beta)$ là hai mặt phẳng lần lượt qua A và B cùng vuông góc với PQ.

$$\overrightarrow{PQ}=(2;-1;1)\Rightarrow PQ:\begin{cases}x=1+2t\\ y=1-t\\ z=t\end{cases}\Rightarrow M(1+2t;1-t;t).$$

$$(\alpha): 2x-y+z-1=0\Rightarrow PQ\cap(\alpha)=A'(1;1;0)\equiv P.$$

$$(\beta): 2x-y+z-4=0\Rightarrow PQ\cap(\beta)=B'\left(2;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow PB'+B'Q=PQ$ hay B' thuộc đoạn PQ. Khi đó:

$$\min(MA+MB)=\sqrt{\mathrm{d}^2\left((\alpha),((\beta))\right)+\left[\mathrm{d}(A,PQ)+\mathrm{d}(B,PQ)\right]^2}$$

$\mathrm{d}((\alpha),(\beta))=\frac{4-1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ và $\mathrm{d}(A,PQ)=\sqrt{2},\mathrm{d}(B,PQ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tổng độ dài ngắn nhất là:

$$l=PQ+MA+MB=\sqrt{6}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2\sqrt{6}\approx 4,9.$$

Lúc đó ta có:

$$\frac{AP}{AP+\mathrm{d}(B,PQ)}=\frac{PM}{\mathrm{d}((\alpha),(\beta))}\Rightarrow PM=\frac{AP.\mathrm{d}((\alpha),(\beta))}{AP+\mathrm{d}(B,PQ)}=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx 0,8.$$

Cách 3:

Ta có

$$\overrightarrow{PQ}=(2;-1;1)\Rightarrow PQ:\begin{cases}x=1+2t\\ y=1-t\\ z=t\end{cases}\Rightarrow M(1+2t;1-t;t).$$

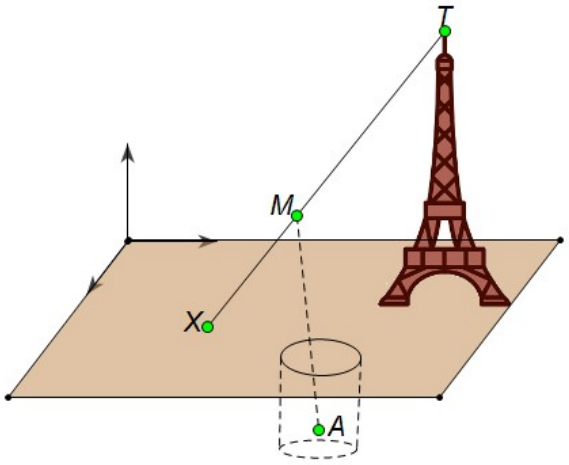
$$MA+MB=\sqrt{6t^2+2}+\sqrt{6t^2-6t+2}=\sqrt{\left(\sqrt{6}t\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}.$$

Suy ra: $MA+MB\geq\sqrt{\left(\sqrt{6}t+\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t\right)^2+\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{6}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{6}t.\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t\right).\sqrt{2}\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}\Rightarrow M\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Vậy $PM=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx 0,8$.

Câu 21. Người ta thiết kế một dây cáp chạy thẳng từ điểm X ở trên mặt đất tới đỉnh T của một tòa tháp. Giả sử tọa độ của các điểm là $T(40;60;150)$ và $X(100;-40;0)$ trong hệ tọa độ không gian $Oxyz$, với O là gốc tọa độ đặt tại mặt đất. Người ta muốn nối điểm $A(40;30;-20)$ nằm dưới một cái hố tới một điểm $M(a;b;c)$ nằm trên dây cáp sao khoảng cách MA này là nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.



Lời giải

Đáp án: 100.

MA nhỏ nhất khi và chỉ khi $MA\perp XT$ hay M là giao điểm của mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc XT với XT.

$$(\alpha)\text{ có }\begin{cases}\text{qua } A(40;30;-20)\\ \text{VTPT } \vec{n}=\overrightarrow{XT}=(-60;100;150)=-10(6;-10;-15)\end{cases}\Rightarrow(\alpha):6x-10y-15z-240=0$$

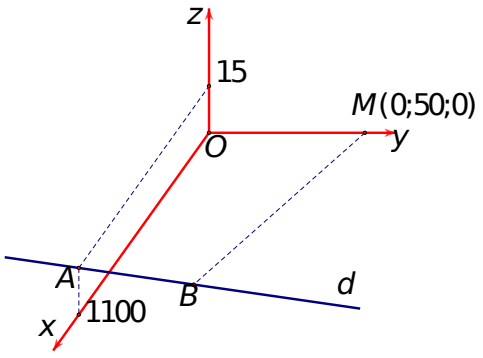
Phương trình tham số của $XT:\begin{cases}x=40+6t\\ y=60-10t\\ z=150-15t\end{cases}$

Suy ra: $6(40+6t)-10(60-10t)-15(150-15t)-240=0\Leftrightarrow 361t-2850=0\Leftrightarrow t=\frac{150}{19}$.

Tọa độ của M là $\begin{cases} a = x = 40 + 6.\dfrac{150}{19} = \dfrac{1660}{19} \\ b = y = 60 - 10t = 60 - 10.\dfrac{150}{19} = -\dfrac{360}{19} \\ c = z = 150 - 15t = 150 - 15.\dfrac{150}{19} = \dfrac{600}{19} \end{cases}$

Vậy $a + b + c = \dfrac{1660 - 360 + 600}{19} = \dfrac{1900}{19} = 100$

Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét mô hình phòng không như sau: rada đặt tại gốc tọa độ $O(0;0;0)$, tên lửa phòng không đặt tại điểm $M(0;50;0)$, mỗi đơn vị tương ứng với 10m, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Oz vuông góc mặt đất và hướng lên. Giả sử mọi UAV (phương tiện bay không người lái) và tên lửa đều chuyển động thẳng đều. Tại thời điểm $t = 0(\text{s})$, rada phát hiện ra UAV A ở toạ độ $A_0(1100;0;15)$. Tại thời điểm $t = 1s$, rada theo dõi thấy UAV A ở tọa độ $A_1(1095;1;14,5)$ trên đường thẳng d. Tại thời điểm $t = 6(\text{s})$, một tên lửa được phóng lên và chuyển động thẳng đều với vận tốc $1300(\text{m/s})$, va chạm và phá huỷ UAV A tại điểm B trên d. Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ lúc được phóng lên thì tên lửa va chạm với UAV (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của giây)?



Lời giải

Đáp án: 7,93.

Vectơ vận tốc của UAV: $\vec{v} = \overrightarrow{A_0A_1} = (-5;1;-0,5) \Rightarrow |\vec{v}| = \dfrac{\sqrt{105}}{2} \Rightarrow v = 5\sqrt{105}\ (\text{m/s}).$

Đường bay của UAV: $d: \begin{cases} x = 1100 - 5t \\ y = t \\ z = 15 - 0,5t \end{cases}$

Vị trí của UAV tại thời điểm $6\ (\text{s}): N(1070;6;12).$

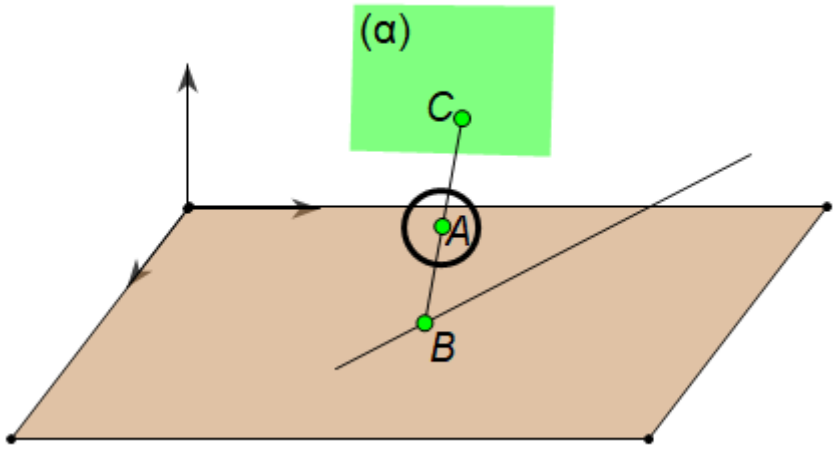
Yêu cầu bài toán là tìm điểm $B \in d$ sao cho $\dfrac{10BN}{5\sqrt{105}} = \dfrac{10BM}{1300} \Leftrightarrow 1690000BN^2 = 2625BM^2$

$\Rightarrow 1690000\left[(30-5t)^2 + (t-6)^2 + (3-0,5t)^2\right] = 2625\left[(1100-5t)^2 + (t-50)^2 + (15-0,5t)^2\right]$

$\Leftrightarrow 44293593,75t^2 - 503173125t - 1586353125 = 0 \Rightarrow t = 13,93083295$

Vậy từ lúc tên lửa phóng lên cho đến lúc va chạm UAV A là: $t = 13,93 - 6 = 7,93(s)$.

Câu 23. Trong một trung tâm nghiên cứu robot bay, người ta bố trí một thiết bị định vị tại điểm cố định $A(1;0;2)$ trong không gian ba chiều với hệ toạ độ $Oxyz$ (các đơn vị tọa độ được tính bằng mét). Thiết bị này giao tiếp đồng thời với hai cảm biến: Cảm biến thứ nhất di chuyển dọc theo đường thẳng $\Delta : \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$, cảm biến thứ hai được gắn trên mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y + z + 1 = 0$. Giữa hai cảm biến được kết nối bằng một đường truyền BC, trong đó B nằm trên đường thẳng Δ, C nằm trên mặt phẳng (α) và thiết bị định vị tại A là trung điểm của đoạn BC. Biết rằng đường thẳng BC có một véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (-2;a;b)$, hãy tính giá trị $a + 2b$.



Lời giải

Đáp án:-1,5

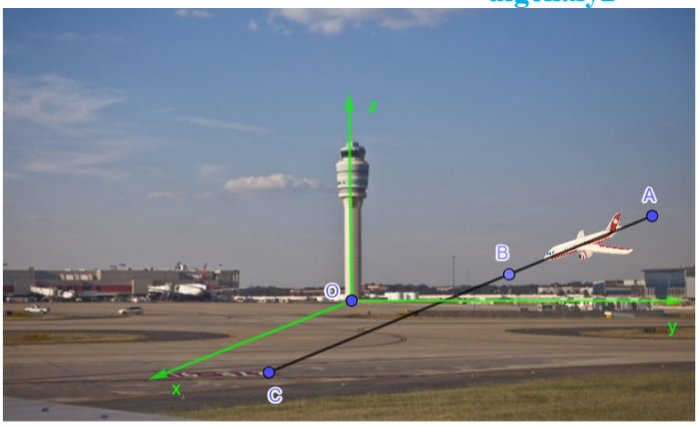
Gọi $B = (3 + t; -1 + 2t; 4 - t) \in \Delta$

Do A là trung điểm của BC nên

$$C = (-1 - t; 1 - 2t; t) \in (\alpha) \Leftrightarrow 2(-1 - t) - (1 - 2t) + t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow B(5;3;2)$$

Suy ra $$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (4;3;0) = -2\left(-2; -\frac{3}{2}; 0\right) \Rightarrow a = -\frac{3}{2}; b = 0 \Rightarrow a + 2b = -1,5$$

Câu 24. Tại một sân bay, người ta chọn hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O tại vị trí chân của đài quan sát, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính theo kilomét). Trên màn hình Rađa người ta quan sát một máy bay đang hạ cánh theo đường thẳng từ vị trí $A(4;0;10)$ đến vị trí $B(5;5;6)$ và tiếp đất tại vị trí $C(a;b;0)$. Hỏi vị trí tiếp đất của máy bay cách chân đài quan sát bao nhiêu kilômét? (kết quả làm tròn một chữ số thập phân)



Lời giải

Đường bay của máy bay là đường thẳng AB đi qua $A(4;0;10)$ và có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(1;5;-4)$.

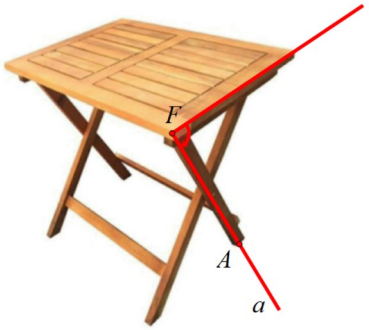
$\Rightarrow AB:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-10}{-4}$.

Vì $C(a;b;0)\in AB$ nên $\dfrac{a-4}{1}=\dfrac{b}{5}=\dfrac{0-10}{-4}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{13}{2}\\ b=\dfrac{25}{2}\end{cases}\Rightarrow C\left(\dfrac{13}{2};\dfrac{25}{2};0\right)$.

Ta có $OC=\sqrt{\left(\dfrac{13}{2}\right)^2+\left(\dfrac{25}{2}\right)^2+0^2}=\dfrac{\sqrt{794}}{2}\approx 14,1$.

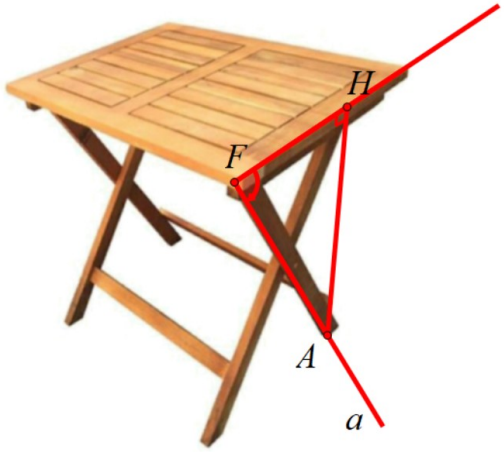
Vậy vị trí tiếp đất của máy bay cách chân đài quan sát khoảng $14,1$ km.

Câu 25. Một chiếc bàn gấp gọn đã được thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Điểm A là chân bàn tiếp xúc với mặt đất thuộc đường thẳng $a:\begin{cases}x=-3+t\\ y=1+t\\ z=-2+4t\end{cases}$ cắt mặt bàn $(P):x+y-2z+6=0$ tại điểm F. Độ dài chân bàn $FA=40\sqrt{3}\,cm$, khi đó độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là là bao nhiêu cm ?



Lời giải

Đáp án: 40



$a:\begin{cases} x=-3+t \\ y=1+t \\ z=-2+4t \end{cases}$

Đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;4)$.

Mặt phẳng $(P):x+y-2z+6=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;-2)$.

$$\sin(a,(P))=\left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right|=\frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\sin\varphi$$

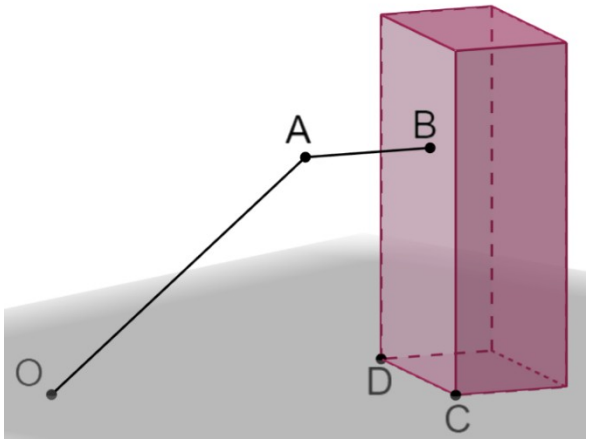
.

Độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là khoảng cách từ chân bàn A đến mặt phẳng (P)

Suy ra $d(A,(P))=AH=FA.\sin\varphi=40\sqrt{3}.\sqrt{\frac{1}{3}}=40cm$.

Câu 26. Một công ty logistics đang thử nghiệm hệ thống giao hàng tự động bằng máy bay không người lái (drone).

Trong không gian $Oxyz$, mỗi đơn vị trên các trục tương ứng với 1 mét trên thực tế. Mặt ngoài của một tòa nhà cao tầng được xem là một phần của mặt phẳng (P) thẳng đứng, đi qua hai điểm $C(10;50;0)$ và $D(30;10;0)$. Vị trí giao hàng là điểm B nằm trên mặt phẳng (P). Drone bắt đầu bay từ kho hàng tại gốc tọa độ $O(0;0;0)$. Ban đầu, nó bay theo một đường thẳng đến vị trí $A(30;40;120)$. Từ vị trí A, drone thay đổi đường bay, di chuyển theo phương vuông góc với mặt phẳng (P) đến vị trí giao hàng B. Tính khoảng cách từ O đến B (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đán án: 126

$\overrightarrow{CD}=(20;-40;0)=20\vec{u}$; với $\vec{u}=(1;-2;0)$.

(P) là mặt phẳng thẳng đứng qua C và D nên nhận vec tơ $\vec{u}=(1;-2;0)$ và $\vec{k}=(0;0;1)$ làm cặp vectơ chỉ phương nên vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=[\vec{u};\vec{k}]=(2;1;0)$

$(P):2(x-10)+1(y-50)+0(z-0)=0\Leftrightarrow 2x+y-70=0$

Đường thẳng AB vuông góc với (P) nên nhận vectơ pháp tuyến của (P) là vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{AB}}=(2;1;0)$. Phương trình đường thẳng AB:

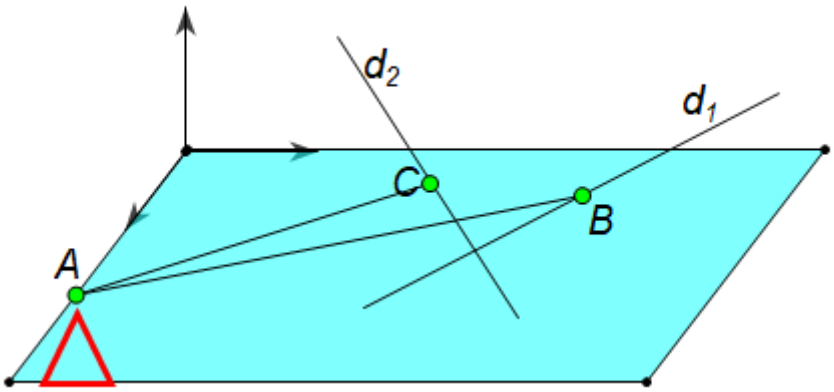
$$\begin{cases}x=30+2t\\y=40+t\\z=120\end{cases}$$

B là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P) nên ta có

$60+4t+40+t-70=0\Leftrightarrow 5t=-30\Leftrightarrow t=-6$

$\Rightarrow B(18;34;120)\Rightarrow OB=\sqrt{18^2+34^2+120^2}=126$

Câu 27. Trạm tàu cứu hộ được đặt tại vị trí $A(5;0;0)$ trên một hòn đảo nhỏ trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục được tính bằng km), được sử dụng làm trạm cứu hộ, cứu nạn trên biển.



Tàu du lịch B đang di chuyển (vận tốc không đổi) trên tuyến đường được mô tả bởi đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2+t\\y=1-2t\\z=0\end{cases}$. Tàu chở hàng C đang di chuyển (vận tốc không đổi) trên tuyến đường vận tải được mô tả bởi đường thẳng $d_2:\begin{cases}x=2-s\\y=11+s\\z=0\end{cases}$. Do thời tiết xấu, nên hai tàu B và C gặp sự cố và cần được tiếp cận khẩn cấp. Trạm cứu hộ điều một tàu cứu hộ xuất phát từ A để lần lượt tiếp cận tàu du lịch B trước, sau đó đến tàu chở hàng C. Xét vị trí tối ưu của tàu du lịch B dừng lại và tàu chở hàng C dừng lại sao cho tổng quãng đường tàu cứu hộ cần đi $T=AB+BC+CA$ là nhỏ nhất. Khi đó $P_{\min}=\sqrt{a}\ (km)$, hãy tính $a+2025$?

Lời giải

Chúng ta cần tìm vị trí tối ưu của tàu du lịch B (tương ứng với điểm B) và tàu chở hàng C (tương

ứng với điểm C) sao cho tổng quãng đường cứu hộ $T = AB + BC + CA$ là nhỏ nhất.

Trong không gian $Oxyz$, ta có:

+ Hai đường thẳng d_1, d_2 cùng nằm trong mặt phẳng $(\alpha): z = 0$ và $A \in (\alpha)$.

+ d_1 có một véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1;-2;0)$; d_2 có một véc tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-1;1;0)$.

Do $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0}$ nên d_1 cắt d_2.

+ Gọi A_1, A_2 lần lượt là điểm đối xứng của A qua d_1 và d_2.

+ Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với $d_1 \Rightarrow (P): x - 2y - 5 = 0$.

+ Gọi $I = (P) \cap d_1$, thì tọa độ của I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 0 \\ x - 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(3;-1;0)$

$\Rightarrow A_1(1;-2;0)$.

+ Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với $d_2 \Rightarrow (Q): -x + y + 5 = 0$.

+ Gọi $J = (Q) \cap d_2$, thì tọa độ của J là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 2 - s \\ y = 11 + s \\ z = 0 \\ -x + y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow J(9;4;0)$

$\Rightarrow A_2(13;8;0)$.

+ Khi đó $T = AB + BC + CA = A_1B + BC + CA_2 \geq A_1A_2$

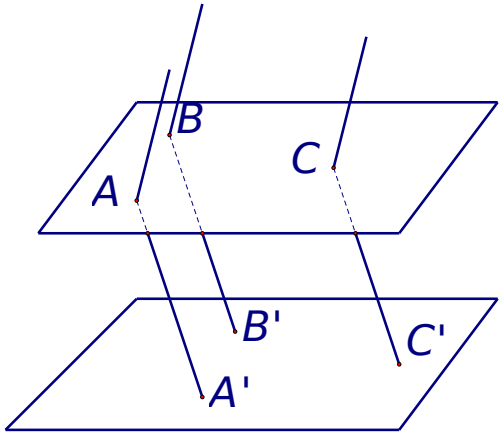
$\Rightarrow T$ đạt GTNN khi $T = A_1A_2 \Rightarrow P_{\min} = A_1A_2 = \sqrt{244}$ (km). Vậy $a + 2025 = 2269$

Dấu bằng xảy ra khi B, C, A_1, A_2 thẳng hàng.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai lớp kính lần lượt là hai mặt phẳng có phương trình $(\alpha): 2x - 2y - z + 3\sqrt{3} = 0, (\beta): -4x + 4y + 2z + 12\sqrt{3} = 0.$ Một nguồn sáng được chiếu vào hai tấm kính là tập hợp các đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;1;1)$ và đi qua các điểm $M(3;0;0), N(1;1;1)$ và $P(3;5;-5).$ Biết rằng các giao điểm của các đường thẳng nói trên với hai tấm kính (α) và (β) là 6 đỉnh của một khối đa diện. Thể tích V của khối đa diện tạo bởi 6 điểm đó có kết quả là $a\sqrt{b}$ với a, b nguyên dương và b là số nguyên tố. Tính giá trị của $a + b.$

Lời giải

Đáp án: 138.



Gọi d_1,d_2,d_3 lần lượt là các đường thẳng qua M,N,P và có vec tơ chỉ phương $\vec{u}$. Khi đó, ta được

$$d_1:\begin{cases}x=3+t\\y=t\\z=t\end{cases};d_2:\begin{cases}x=1+s\\y=1+s\\z=1+s\end{cases};d_3:\begin{cases}x=3+l\\y=5+l\\z=-5+l\end{cases}.$$

Gọi A,B,C lần lượt là giao điểm của d_1,d_2,d_3 với mặt phẳng $(\alpha):2x-2y-z+3\sqrt{3}=0.$

Khi đó, giải tìm các tham số ta được:

$$A=d_1\cap(\alpha)\Rightarrow t=6+3\sqrt{3}\Rightarrow A\left(9+3\sqrt{3};6+3\sqrt{3};6+3\sqrt{3}\right)$$

$$B=d_2\cap(\alpha)\Rightarrow s=-1+3\sqrt{3}\Rightarrow B\left(3\sqrt{3};3\sqrt{3};3\sqrt{3}\right)$$

$$C=d_3\cap(\alpha)\Rightarrow l=1+3\sqrt{3}\Rightarrow C\left(4+3\sqrt{3};6+3\sqrt{3};-4+3\sqrt{3}\right).$$

Ta có

$$\overrightarrow{AB}=(-9;-6;-6),\overrightarrow{AC}=(-5;0;-10)\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=45$$

$$(\alpha):2x-2y-z+3\sqrt{3}=0,(\beta):-4x+4y+2z+12\sqrt{3}=0\Leftrightarrow 2x-2y-z-6\sqrt{3}=0.$$

Ta thấy (α) (β) và mỗi lớp kính là một mặt phẳng nên đoạn khúc xạ trong mỗi tấm kính là không đáng kể. Mặt khác, các tia tới song song nên tia khúc xạ cũng song song. Do đó, mỗi lớp kính có độ khúc xạ bằng bao nhiêu đi nữa thì thể tích lăng trụ được tạo thành đều có thể tích không đổi và bằng

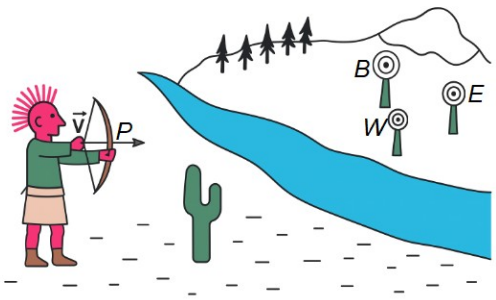
$$V=S_{\Delta ABC}.\mathrm{d}((\alpha),(\beta)).$$

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ là: $d=\dfrac{3\sqrt{3}+6\sqrt{3}}{\sqrt{4+4+1}}=3\sqrt{3}$

Thể tích lăng trụ là: $V=S_{\Delta ABC}.d=45.3\sqrt{3}=135\sqrt{3}\Rightarrow a=135,b=3.$

Vậy $a+b=135+3=138.$

Câu 29. Một cung thủ ngắm từ điểm $P(0;0;15)$ theo hướng của véc tơ $\vec{v}=(-1;3;0,5)$ để bắn trúng một trong ba bia được đặt trên vùng núi. (1 đơn vị $=1\ dm$)



Tọa độ các bia:

- Bia gấu: $B(-155;465;85)$

- Bia sói: $W(-155;465;92,5)$

- Bia nai: $E(-160;640;95)$

Giả sử mũi tên bay theo đường thẳng, tính vận tốc của mũi tên là bao nhiêu m/s, nếu thời gian bay là 1 giây? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 49,6

Điểm bắn: $P(0;0;15)$. Hướng bắn: $\vec{v}=(-1;3;0,5)$.

Phương trình tham số của tia bắn: $\begin{cases} x=-t \\ y=3t \\ z=15+0,5t \end{cases} \quad (t\geq 0)$

Xác định bia trúng

- $B(-155;465;85)$: từ $x=-t\Rightarrow t=155$. Khi đó $z=15+0,5\cdot 155=92,5\neq 85\Rightarrow$ không trúng.

- $W(-155;465;92,5)$: với $t=155$ ta có $z=15+0,5\cdot 155=92,5\Rightarrow$ trúng bia sói W.

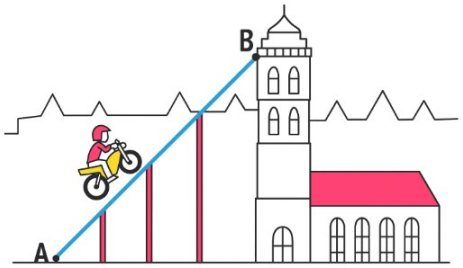
- $E(-160;640;95)$: không có t thỏa đồng thời x,y.

Độ dài quỹ đạo bay $PW=\left|\overrightarrow{PW}\right|=\sqrt{(-155)^2+465^2+77,5^2}=\dfrac{155\sqrt{41}}{2}(dm)\approx 496,242dm$

Tức khoảng 49,624 m.

- Tốc độ: $v=\dfrac{PW}{1s}\approx 496,242dm/s\approx 49,6m/s$.

Câu 30. Một nghệ sĩ đi dây dự định chạy xe mô tô theo đường thẳng từ điểm $A(20;20;0)$ lên tháp nhà thờ tại điểm $B(220;420;80)$ (với 1 đơn vị = 1m).



Sợi cáp được chống đỡ bởi ba cột thẳng đứng có đỉnh tại:

$S_1(70;120;20),\quad S_2(120;220;30),\quad S_3(170;300;60)$.

Hãy tìm tổng hoành độ các cột phù hợp để làm trụ đỡ

Lời giải

Trả lời: 70

Từ đề ta có: $A(20;20;0), B(220;420;80) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (200;400;80) = 40(5;10;2)$

Phương trình tham số của dây cáp AB: $\begin{cases} x = 20 + 200t \\ y = 20 + 400t \ (0 \le t \le 1) \\ z = 80t, \end{cases}$

Ba đỉnh cột: $S_1(70;120;20), S_2(120;220;30), S_3(170;300;60)$.

Đánh giác các cột có phù hợp không?

Một cột "phù hợp" khi điểm đỉnh của nó nằm trên đường thẳng AB (vì dây căng thẳng).

- S_1: $t_x = \dfrac{70-20}{200} = 0,25, t_y = \dfrac{120-20}{400} = 0,25, t_z = \dfrac{20-0}{80} = 0,25 \Rightarrow$ trùng nhau.

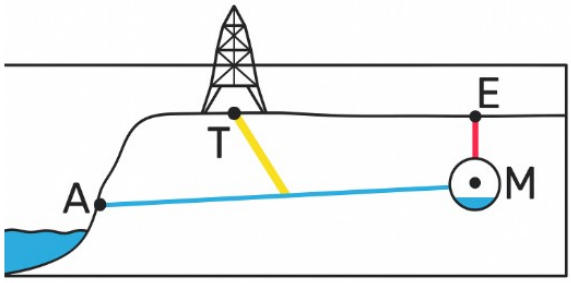
Nên S_1 nằm trên $AB \Rightarrow$ phù hợp.

- S_2: $t_x = t_y = 0,5 \Rightarrow$ tại vị trí này dây có độ cao $z = 80 \cdot 0,5 = 40(m)$, nhưng đỉnh cột có $z = 30$ suy ra chưa phù hợp

- S_3: $t_x = 0,75, t_y = 0,7$ (không bằng nhau) suy ra chưa phù hợp

Vậy có cột S_1 thì phù hợp nên **đáp án bằng 70**

Câu 31. Tại các vị trí M có một hồ chứa nước (để trữ nước sau đó hút nước đưa lên mặt đất tại điểm E). Một kênh tràn k dẫn nước từ M đến A. Từ điểm T trên mặt đất, một mũi khoan thông khí b được khoan theo hướng của véc tơ $\vec{v} = (1;1;-4)$



(1 đơn vị = 100m)

Các tọa độ: $M(8;12;-6),\quad N(14;2;-10),\quad A(11;0;-9),\quad T(8;2;0)$

Hỏi chiều dài mũi khoan cần là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 849

- Kênh tràn k từ M đến A: $\overrightarrow{MA}=(3;-12;-3)=3(1;-4;-1)$.

Vậy phương trình đường thẳng $k:\begin{cases}x=8+t\\y=12-4t\\z=-6-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

- Mũi khoan b qua T, theo $\vec{v}=(1;1;-4)$:

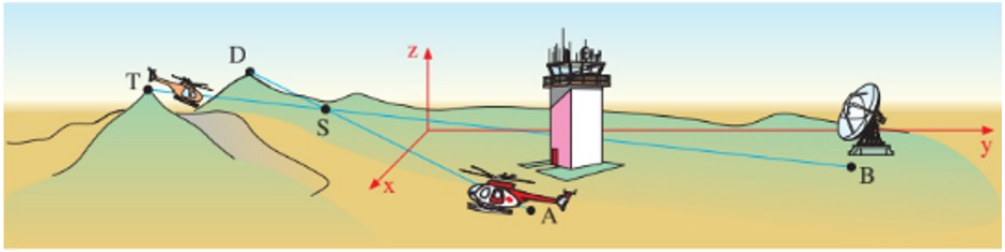
Vậy phương trình đường thẳng $b:\begin{cases}x=8+s\\y=2+s\\z=-4s\end{cases}\quad(s\in\mathbb{R})$

Giải hệ $8+t=8+s,12-4t=2+s,-6-t=-4s\Rightarrow t=s=2$.

Giao điểm $P(10;4;-8)$.

Chiều dài cần khoan từ T đến P: $TP=2\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}=2\sqrt{18}=6\sqrt{2}$ (đơn vị) $600\sqrt{2}\,m\approx 849m$

Câu 32. Trực thăng cứu hộ Alpha cất cánh lúc 10 giờ 00 từ điểm xuất phát Adlerhorst $A(10;6;0)$. Nó bay thẳng với vận tốc $300km/h$ tới đỉnh núi Mount Devil $D(4;-3;3)$, nơi xảy ra tai nạn. (Tọa độ tính bằng km).



Cùng lúc đó, trực thăng Beta cất cánh từ đỉnh núi Tempelberg $T(7;-8;3)$ để đưa du khách về điểm $B(4;16;0)$. Vận tốc của nó là $350km/h$.

Người ta chứng minh được rằng hai trực thăng có đường bay giao nhau tại S. Khi Alpha tới S thì Beta đã đi qua trước đó một khoảng thời gian (tính bằng giây), hãy tìm khoảng thời gian đó? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 6,4

Phương trình đường bay của Alpha

Điểm $A(10;6;0)$, hướng $\overrightarrow{AD}=(-6;-9;3)$: $\begin{cases} x=10-6t \\ y=6-9t \\ z=0+3t \end{cases}$

Phương trình đường bay của Beta

Điểm $T(7;-8;3)$, hướng $\overrightarrow{TB}=(-3;24;-3)$: $\begin{cases} x=7-3s \\ y=-8+24s \\ z=3-3s \end{cases}$

- Giao điểm đường bay:

Giải hệ cho $r=\frac{2}{3}, s=\frac{1}{3}$, được giao điểm $S(6;0;2)$

- Tính quãng đường tới điểm S:

$$|AS|=\sqrt{(-4)^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{56}\approx 7,48\,km$$
$$|TS|=\sqrt{(-1)^2+8^2+(-1)^2}=\sqrt{66}\approx 8,12\,km$$

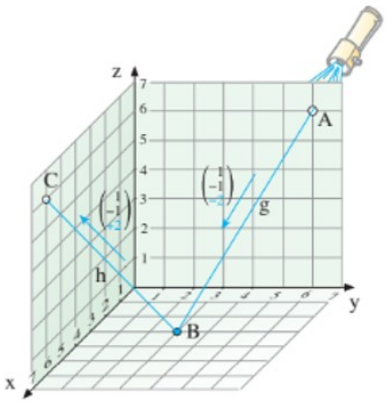
- Tính thời gian bay tới S:

Alpha: $t_\alpha=\frac{7,48}{300}h\approx 0,025\,h\approx 1,50$ phút

Beta: $t_\beta=\frac{8,12}{350}h\approx 0,023\,h\approx 1,39$ phút

Vậy Alpha tới S muộn hơn Beta khoảng 0,11 phút $\approx 6,4\,s$.

Câu 33. Quỹ đạo của một tia sáng được theo dõi. Tia sáng xuất phát từ điểm $A(0;6;6)$ theo hướng của véc tơ $\vec{v}=(1;-1;-2)$ và đi tới mặt phẳng xOy, tại đó nó bị phản xạ.



Tia sáng phản xạ cắt mặt phẳng xOz tại điểm $C(a;b;c)$ tính $a+b+c$?

Lời giải

Trả lời: 12

- Phương trình tia sáng g

Điểm $A(0;6;6)$, véc tơ chỉ phương $(1;-1;-2)$: $\begin{cases} x=0+t \\ y=6-t \\ z=6-2t \end{cases}$

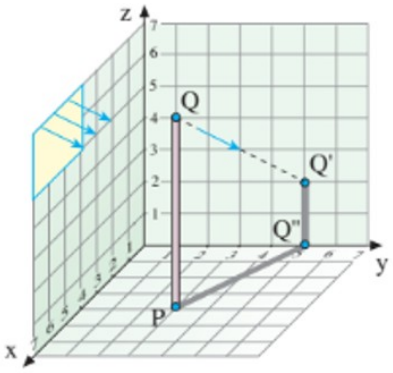
Giao điểm với mặt phẳng $xOy(z=0)$: $6-2t=0 \Rightarrow t=3 \Rightarrow B(3;3;0)$

- Phương trình tia phản xạ h

Tại $B(3;3;0)$, đổi dấu hệ số z của véc tơ (từ -2 thành +2): $\begin{cases} x=3+s \\ y=3-s \\ z=0+2s \end{cases}$

Giao điểm với mặt phẳng $xOz(y=0)$: $3-s=0 \Rightarrow s=3 \Rightarrow C(6;0;6)$

Câu 34. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, có đoạn thẳng đứng PQ với: $P(4;3;0), Q(4;3;6)$.



Ánh sáng song song theo hướng của véc-tơ $\vec{v}=(-2;1;-2)$ chiếu vào đoạn thẳng (như hình). Hãy tính tổng độ dài đoạn chiếu bóng $PQ''+Q'Q''$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 6,9

Kết quả là một bóng gãy khúc, được xác định bằng cách xét tia sáng đi qua điểm Q.

1. Phương trình tham số của đường thẳng g qua Q: $g: \begin{cases} x=4-2t \\ y=3+t \\ z=6-2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

2. Giao điểm Q' của g với mặt phẳng $x=0$ (mặt phẳng yOz): $4-2t=0 \Rightarrow t=2$

Thay vào: $Q'(0;5;2)$

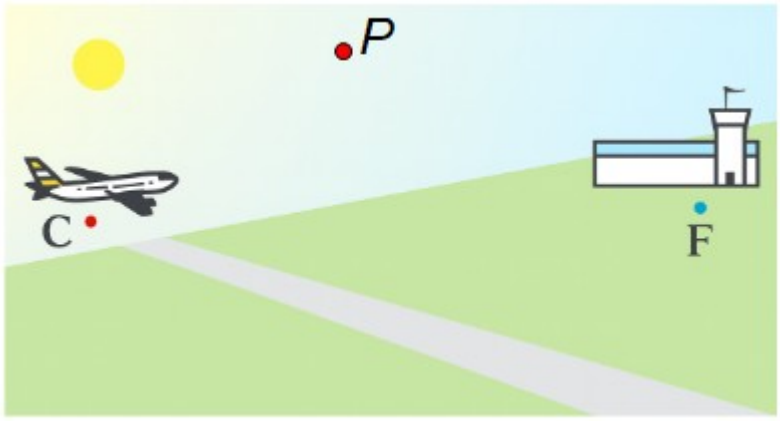
3. Hình chiếu vuông góc của Q' xuống trục Oy:

Điều kiện trên trục $Oy: x=0, z=0$, giữ nguyên $y=5$

Nên $Q''(0;5;0)$

Khi đó: $PQ''+Q'Q''=\sqrt{4^2+2^2+2^2}+2=2+2\sqrt{6}\approx 6,9$

Câu 35. Máy bay Beta hướng tới điểm $C(10;-10;5)$ theo hướng của véc tơ $\vec{v}=(-2;2;-1)$
Khi qua điểm C, máy bay Beta nhận lệnh từ đài kiểm soát bay đổi hướng bay theo véc tơ $\vec{w}=(-5;4;-1)$. Ở điểm P có độ cao 1000 m, máy bay Beta sẽ thực hiện một lần đổi hướng cuối cùng theo vecto $\vec{u}$ để hạ cánh xuống sân bay F. Tính cosin góc của hai vecto $\vec{u}$ và $\vec{w}$. (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Sân bay F nằm trên mặt phẳng Oxy. Mỗi đơn vị trong hệ tọa độ tương ứng 1 km.

Lời giải

Trả lời: 0,95

Sau khi qua C, Beta bay theo $\vec{w}=(-5;4;-1)$: $\begin{cases} x=10-5\lambda \\ y=-10+4\lambda \\ z=5-\lambda \end{cases}$

Ở cao $1000m=1km: 5-\lambda=1\Rightarrow\lambda=4$.

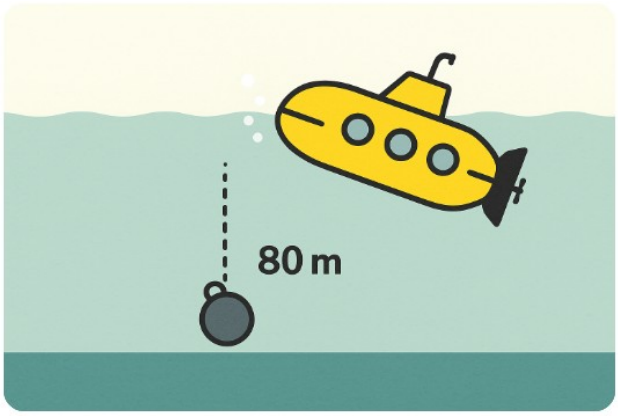
Điểm đổi hướng cuối: $P(-10;6;1)$.

Chặng cuối hướng về $F(-12;7;0)$ có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{PF}=\vec{u}=(-2;1;-1).$

Khi đó $\cos\theta=\dfrac{\vec{w}.\vec{u}}{|\vec{w}|.|\vec{u}|}=\dfrac{10+4+1}{\sqrt{42}.\sqrt{6}}=\dfrac{15}{\sqrt{252}}\approx 0,95$

Câu 36. Một tàu ngầm bắt đầu lặn tại điểm $P(100;200;0)$ với vận tốc 11,1 hải lý/giờ theo hướng tới mục tiêu $Z(500;600;-80)$ cho đến khi đạt độ sâu 80 m.
(1 hải lý/giờ sắp xỉ 1,852 km /h)

Sau đó, tàu tiếp tục di chuyển ngang hướng theo vectơ $\vec{u}=(1;1;0)$ với vận tốc 11 hải lý/giờ. Một quả cầu T được thả đồng thời khi tàu ngầm bắt đầu lặn, từ tàu nghiên cứu $S(700;800;0)$ và rơi thẳng đứng xuống với vận tốc $0,5\,m/s$. Tính khoảng cách tàu ngầm với quả cầu khi tàu ngầm đi đến thẳng dưới S (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 5

Ta có $\overrightarrow{PZ}=(400;400;-80).$

- Đoạn lặn $P\to Z$ (dừng ở độ sâu 80 m): $\begin{cases}x=100+400t\\y=200+400t\quad 0\le t\le 1\\z=0-80t\end{cases}$

- Chuyển động ngang từ Z theo vectơ $\vec{u}=(1;1;0)$: $\begin{cases}x=500+s\\y=600+s\quad s\ge 0\\z=-80\end{cases}$

- Quả cầu rơi thẳng đứng từ S: $\begin{cases}x=700\\y=800\quad\quad t\ge 0\\z=-0,5t\end{cases}$

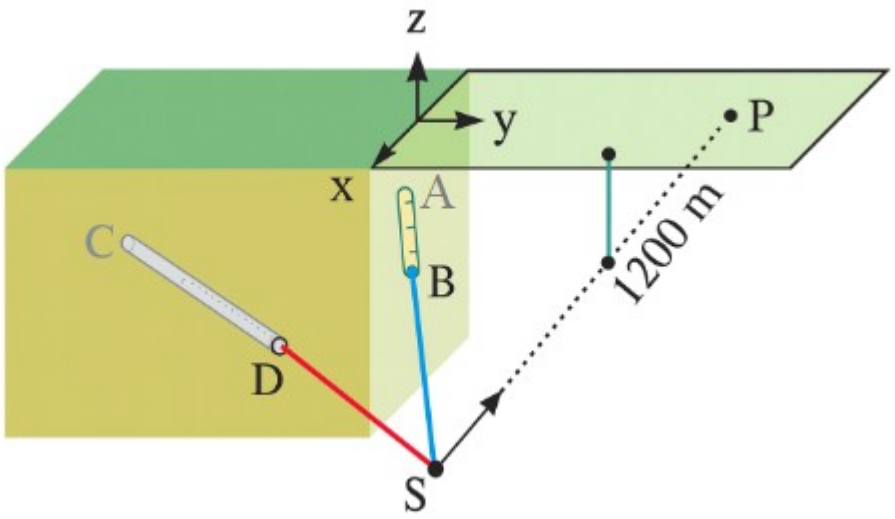
- Tàu đi đến thẳng dưới S khi $x=700, y=800\Rightarrow s=200$.

- Thời gian: lặn $P\to Z: t_1=\dfrac{|\overrightarrow{PZ}|}{11,1}=\dfrac{80\sqrt{51}}{5,7103}\approx 100,05s$;

- Thời gian đi ngang tới dưới $S: t_2=\dfrac{200\sqrt{2}}{11}=\dfrac{200\sqrt{2}}{5,6589}\approx 49,98s$.

- Lúc đó quả cầu có $z=-0,5(t_1+t_2)\approx -75m$, còn tàu ở $z=-80m$, vậy khoảng cách giữa tàu ngầm với quả cầu bằng $5m$

Câu 37. Từ điểm $A(-7;-3;-8)$ qua điểm $B(-2;0;-9)$ một đường hầm thẳng tên Kuckucksloch sẽ được đào xuyên vào núi.



Tương tự, từ điểm $C(4;-6;-6)$ qua điểm $D(7;-1;-8)$ một đường hầm thẳng tên Morgenstern cũng sẽ được xây dựng. Sau khi khoang xong 2 đường hầm sẽ gặp nhau tại điểm S. Từ điểm S, đường hầm Kuckucksloch tiếp tục đào theo hướng véc tơ $(2;1;2)$, cho đến khi đến điểm P trên mặt đất mà đường hầm sẽ chạm tới. Trên đoạn SP, cách P một khoảng 1200 m sẽ đào một lối thoát hiểm thẳng đứng. Tính độ sâu cần đào bằng bao nhiêu mét?

(Mỗi đơn vị trong hệ tọa độ tương ứng 100 m. Mặt đất là mặt phẳng xOy)

Lời giải

Trả lời: 800

- Hầm Kuckucksloch qua $A, B: \overline{AB}=(5;3;-1)$: $k:\begin{cases}x=-7+5t\\y=-3+3t\\z=-8-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$

- Hầm Morgenstern qua $C, D: \overline{CD}=(3;5;-2)$: $m:\begin{cases}x=4+3s\\y=-6+5s\\z=-6-2s\end{cases}\ (s\in\mathbb{R})$

Giải hệ $k=m: t=4, s=3\Rightarrow S(13;9;-12)$.

-Từ S đào theo $\vec{u}=(2;1;2)$. Điểm chạm mặt đất P

Đường thẳng: $SP:\begin{cases}x=13+2\lambda\\y=9+\lambda\\z=-12+2\lambda\end{cases}\ (\lambda\geq 0)$

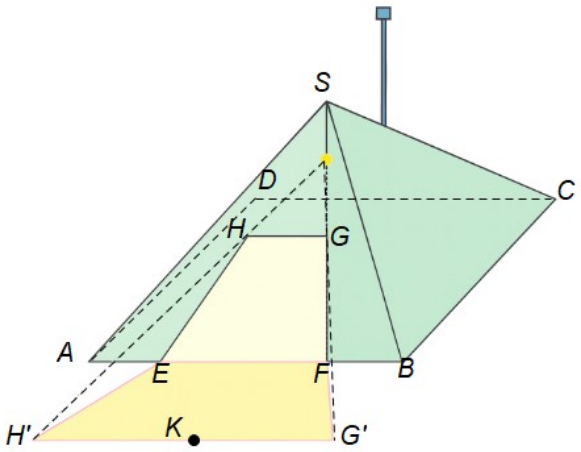
Giao với $z=0\Rightarrow -12+2\lambda=0\Rightarrow\lambda=6$ suy ra $P(25;15;0)$;

-Gọi Q là điểm trong lòng núi nằm trên đoạn SP, sao cho Q cách P $1200m$ hay $QP=12$ đơn vị. Ta có $SP=18$. Suy ra $Q=(17;11;-8)$. Ta được:

Vị trí trên mặt đất để khoan thẳng đứng: $G(17;11;0)$.

Độ sâu cần khoan: $|z_Q|=8dv=800m$.

Câu 38. Một cái lều có dạng hình chóp tứ giác đều, đáy rộng 8 m và cao 3 m.



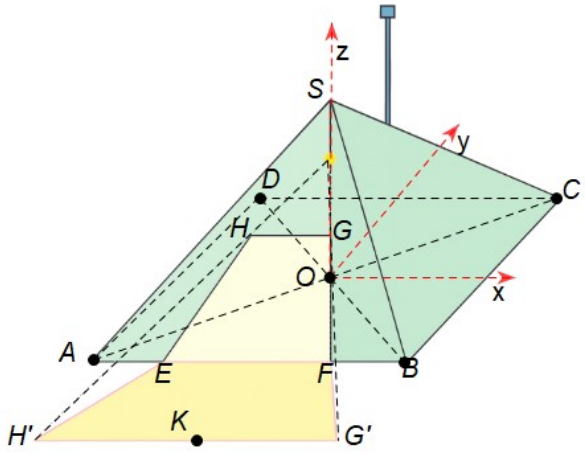
Cửa vào là hình thang $EFGH$ trong đó đoạn $AE = FB$, với $|EF| = 4\,m, G$ và H lần lượt là trung điểm của các đoạn ES và FS. Một nguồn sáng đặt cách đỉnh S $1\,m$ ở phía dưới. Ánh sáng chiếu ra ngoài qua cửa vào, tạo thành một vùng được chiếu sáng $EFG'H'$.

Ở giữa cạnh sau CD của lều có gắn một camera trên một cột thẳng đứng. Camera phải đặt ở độ cao ít nhất là bao nhiêu mét để quan sát được điểm K là trung điểm của $H'G'$?

Lời giải

Trả lời: 4,5

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta đặt hệ trục $Oxyz$ như hình: khi đó: $O(0;0;0)$

$A(-4;-4;0), B(4;-4;0), C(4;4;0), D(-4;4;0), S(0;0;3)$, $E(-2;-4;0), F(2;-4;0)$

G, H là trung điểm của $SE, SF \Rightarrow G(-1;-2;1,5), H(1;-2;1,5)$.

Nguồn sáng $L(0;0;2)$ ở trên trục SO. Chiếu xuyên cửa lên mặt đất $z = 0$.

Đường chiếu qua G có phương trình: $\begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = 2 - 0,5t \end{cases}$ giao $z = 0 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow G'(-4;-8;0)$.

Tương tự $H'(4;-8;0)$.

-Trung điểm M của $CD: M(0;4;0)$.

-Trung điểm K của $G'H': K(0;-8;0)$.

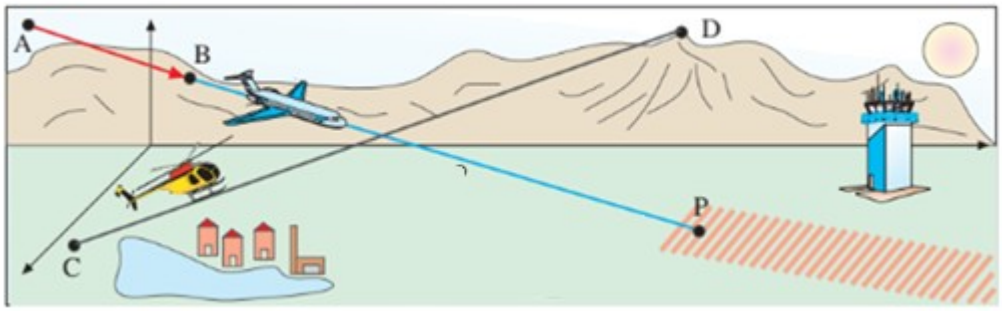
Đặt camera tại $C_m(0;4;H)$ trên cột thẳng đứng. Muốn nhìn tới K phải vừa lướt qua đỉnh $S(0;0;3)$.

Phương trình tham số đường C_mK: $\begin{cases} x=0 \\ y=4-12t, \quad (0\le t\le 1) \\ z=H-Ht \end{cases}$

Cho $y=0\Rightarrow t=\frac{1}{3}$. Yêu cầu $z=3\Rightarrow H\left(1-\frac{1}{3}\right)=3\Rightarrow H=4,5m$.

Vậy đặt camera cao $4,5m$ ở giữa cạnh CD thì thấy được điểm K

Câu 39. Một máy bay đang bay với vận tốc không đổi trong quá trình tiếp cận đường băng. (Các giá trị tọa độ tính bằng km).



Lúc 16:00, máy bay ở vị trí $A(4;0;6)$. Một phút sau, máy bay ở vị trí $B(5;3;4,5)$ và sẽ bay tiếp đến điểm P trên đường băng (mặt phẳng $z=0$).

Cùng lúc bắt đầu tiếp cận ở A, một trực thăng khởi hành từ giàn khoan dầu $C(12;0;0)$ theo hướng tới trạm trên núi $D(-2;14;7)$. Thời gian dự kiến cho chuyến bay này là đúng 5 phút. Ta chứng minh được quỹ đạo bay của trực thăng và máy bay sẽ cắt nhau tại một điểm M nhưng sẽ không xảy ra tai nạn vì thời gian đi qua điểm M của trực thăng và máy bay chênh lệch nhau. Tìm thời gian chênh lệch đó là bao nhiêu giây? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 8,75

-Theo đề ta có: $A(4;0;6), B(5;3;4,5)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;3;-1,5)$.

Tốc độ máy bay $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+3^2+1,5^2}=3,5\,km/$ phút (tức $210\,km/h$).

Đường bay: $\ell:\begin{cases}x=4+t\\y=0+3t\\z=6-1,5t\end{cases}\quad(t\ge 0)$

-Trực thăng từ $C(12;0;0)$ đến $D(-2;14;7)$ trong 5 phút $\overrightarrow{CD}=(-14;14;7)$.

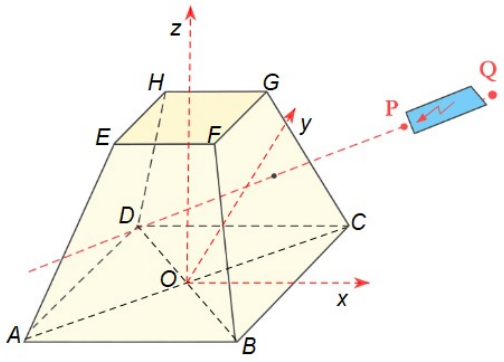
Đường bay (tham số s, phút): $h:\begin{cases}x=12-\dfrac{14}{5}s\\y=0+\dfrac{14}{5}s\\z=0+\dfrac{7}{5}s\end{cases}\quad(0\le s\le 5)$

Giải $\ell=h$: $t=2, s=\dfrac{15}{7}, \Rightarrow M(6;6;3).$

Thời điểm tới điểm chung: máy bay $t=2$ phút, trực thăng $s=\dfrac{15}{7}$ phút.

Chênh lệch $\dfrac{1}{7}$ phút $\approx 8,57$ giây

Câu 40. Một khối thép không gỉ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều.



- Độ dài cạnh đáy lớn: 8 cm

- Độ dài cạnh đáy nhỏ: 4 cm

- Chiều cao: 8 cm

Gốc tọa độ $O(0;0;0)$ đặt tại tâm đáy lớn.

Tia laser khoan theo đoạn PQ với: $P(-3,5;9,5;6),\quad Q(-6;16;8)$

Tính độ dài kênh khoan biết đầu vào nằm trong mặt $CDHG$ và đầu ra nằm trong mặt $ABFE$

Lời giải

Ta quy ước gốc $O(0;0;0)$ tại tâm đáy lớn, trục Oz vuông góc đáy; đáy lớn (cạnh 8) là hình vuông $A(-4;-4;0),\ B(4;-4;0),\ C(4;4;0),\ D(-4;4;0),$

đáy nhỏ (cạnh 4) song song và ở $z=8$: $E(-2;-2;8),\ F(2;-2;8),\ G(2;2;8),\ H(-2;2;8)$.

(đơn vị: cm)

Tia khoan đi theo đường thẳng qua $P(-3,5;9,5;6), Q(-6;16;8)$ với véc tơ $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=(-2,5;6,5;2)$.

Phương trình tham số: $\ell:\begin{cases}x=-3,5-2,5t,\\ y=9,5+6,5t,\\ z=6+2t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$. Suy ra phương trình các mặt: $ABFE:-4y+z-16=0, CDHG:4y+z-16=0$

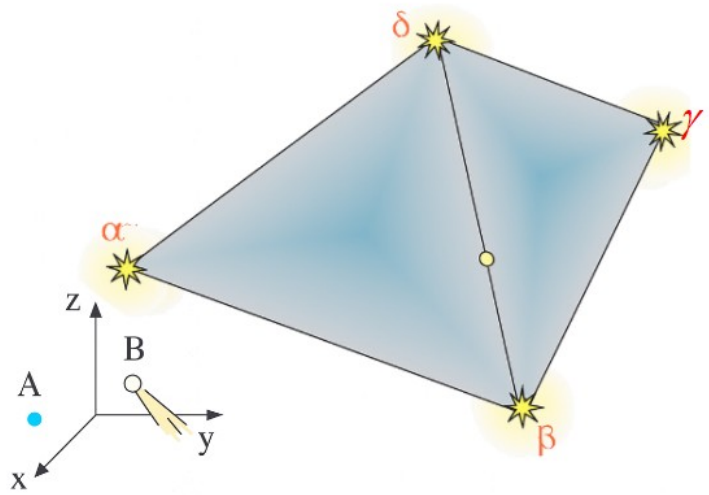
- Với $CDHG:4y+z-16=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow I=\ell(-1)=(-1;3;4)$ nằm trong mặt $CDHG\Rightarrow$ điểm vào $I(-1;3;4)$.

- Với $ABFE:-4y+z-16=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow O=\ell(-2)=\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{2};2\right)$ nằm trong mặt $ABFE$

$\Rightarrow$ điểm ra $O\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{2};2\right)$.

Chiều dài kênh khoan $IO=\sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2+\left(-\frac{7}{2}-3\right)^2+(2-4)^2}=\frac{\sqrt{210}}{2}cm\approx 7,25cm.$

Câu 41. Bốn ngôi sao $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ tạo thành một vùng không gian hình chóp tứ giác. Tọa độ các ngôi sao là: $\alpha(4;4;8),\quad \beta(0;20;0),\quad \gamma(-16;16;4),\quad \delta(-8;12;12)$



Một sao chổi bay theo đường thẳng qua hai điểm $A(10;3;1)$ và $B(4;7;3)$. Người ta thấy rằng sao chổi đi vào vùng không gian tại điểm S thuộc tam giác $\alpha\beta\gamma$ và tại đó sao chổi rời khỏi vùng không gian hình chóp này tại điểm T. Tính độ đường đi ST bằng bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). (1 đơn vị $=1000km$)

Lời giải

Trả lời: 7483

Dữ kiện $\vec{u}_{AB}=(-6;4;2)$

Mặt phẳng $(\alpha\beta\gamma)$ có $\vec{n}_{\alpha\beta\gamma} = \left[\overrightarrow{\beta\alpha}, \overrightarrow{\gamma\alpha}\right] = (2;9;17),$ nên phương trình tổng quát:

$2x + 9y + 17z - 180 = 0.$

Tìm điểm S - giao của quỹ đạo và tam giác $\alpha\beta\gamma$

Đường thẳng qua $A(10;3;1), B(4;7;3)$ (dạng tham số): $\begin{cases} x = 10 - 6t \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Giao với $(\alpha\beta\gamma): 2x + 9y + 17z - 180 = 0$:

$2(10 - 6t) + 9(3 + 4t) + 17(1 + 2t) - 180 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow S(-2;11;5).$

Tìm điểm T - nơi sao chổi rời khối chóp

Pháp tuyến các mặt còn lại: $\vec{n}_{\alpha\beta\delta} = (8;7;10), \quad \vec{n}_{\alpha\gamma\delta} = (5;8;-1), \quad \vec{n}_{\beta\gamma\delta} = (-1;10;6).$

Ta có $\vec{u}_{AB} \cdot \vec{n}_{\alpha\beta\delta} = 0$ và $\vec{u}_{AB} \cdot \vec{n}_{\alpha\gamma\delta} = 0$

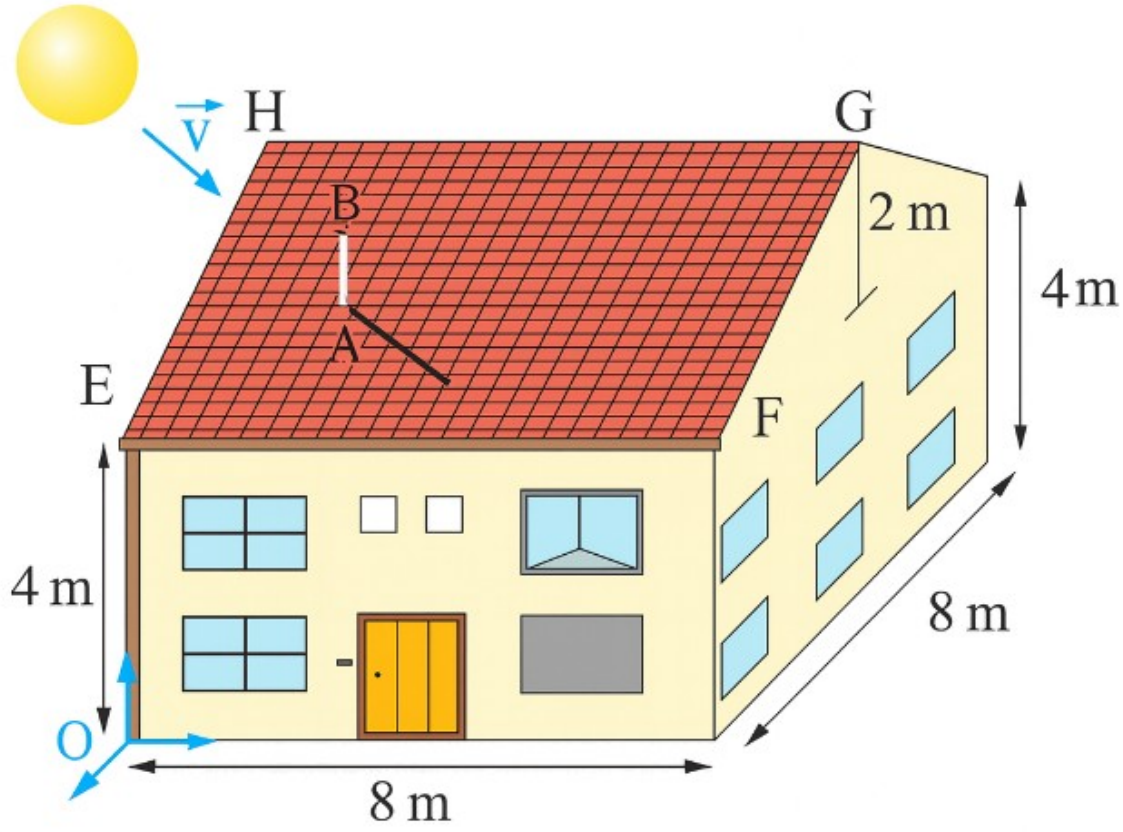
$\Rightarrow$ đường thẳng song song hai mặt này, không cắt chúng.

Mặt $(\beta\gamma\delta)$ có phương trình: $-x + 10y + 6z - 200 = 0$

Giao với đường thẳng: $-(10 - 6t) + 10(3 + 4t) + 6(1 + 2t) - 200 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow T(-8;15;7).$

Suy ra: $ST = 2\sqrt{14}.1000 \approx 7483$ km

Câu 42. Cho ngôi nhà như hình bên phải (các kích thước tính theo mét).



Một ăng-ten trên mái nhà có hai điểm đầu mút: $A(-2;2;5), \quad B(-2;2;6)$

Chiếu ánh sáng song song theo hướng của véc-tơ $\vec{v}=(2;8;-3)$ vào ăng-ten, bóng của ăng-ten sẽ đổ xuống mặt phẳng mái $EFGH$.

Tính chiều dài bóng của ăng-ten trên mái nhà bằng bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 1,31

Chọn hệ trục tọa độ như hình, khi đó

$E(0;0;4), F(8;0;4), H(0;4;6), G(8;4;6)$

$\overrightarrow{EF}=(8;0;0), \overrightarrow{EH}=(0;4;2) \Rightarrow \vec{n}=\left[\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}\right]=(0;-16;32)$

Suy ra mặt phẳng $EFGH$: $2z-y-8=0$

Ánh sáng: $\vec{v}=(2;8;-3)$.

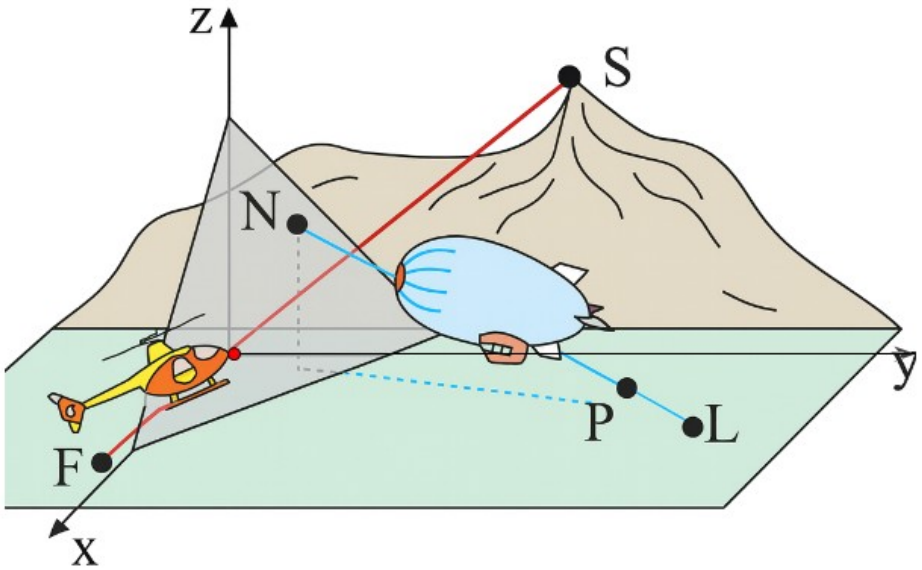
Đường thẳng qua $B(-2;2;6)$ song song $\vec{v}$: $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=2+8t \\ z=6-3t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

Giao với $2z-y-8=0 \Rightarrow t=\frac{1}{7} \Rightarrow B'\left(-\frac{12}{7};\frac{22}{7};\frac{39}{7}\right)$

Vì $A(-2;2;5) \in EFGH$ nên bóng của nó cũng là chính nó.

Từ đó ta có: chiều dài bóng của ăng-ten trên mái: $|AB'|=\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{8}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{21}}{7}m \approx 1,31m.$

Câu 43. Một khinh khí cầu l xuất phát từ sân bay $L(24;52;0)$ và sau đó được xác định tại $P(20;42;2)$.



Một trực thăng h bay thẳng đều cùng thời điểm trong ngày, xuất phát từ sân bay quân sự $F(20;-8;0)$ hướng về đỉnh núi $S(-4;32;16)$.

Bức tường sương mù được mô tả bởi mặt phẳng E_{ABC} với $A(16;0;0),\quad B(0;16;0),\quad C(0;0;16).$

Gọi T là vị trí mà quỹ đạo bay của khinh khí cầu l và trực thăng h cắt nhau.

Trên quỹ đạo bay tiếp theo, khinh khí cầu l đi vào tường sương mù tại N.

Tính khoảng cách TN (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) (các kích thước tính theo km).

Lời giải

Trả lời: 11

Từ đề bài ta xác định được:

Đường thẳng l: $\begin{cases} x = 24 - 4t \\ y = 52 - 10t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t \end{cases}$

Đường thẳng h: $\begin{cases} x = 20 - 3s \\ y = -8 + 5s \quad (s \in \mathbb{R}) \\ z = 2s \end{cases}$

Giải hệ $24 - 4t = 20 - 3s, 52 - 10t = -8 + 5s, 2t = 2s \Rightarrow t = s = 4 \Rightarrow T(8;12;8).$

Vì $t = s = 4 > 0$ (cùng thời điểm kể từ lúc xuất phát) nên hai quỹ đạo có thể va chạm tại T.

Khinh khí cầu l gặp tường sương mù

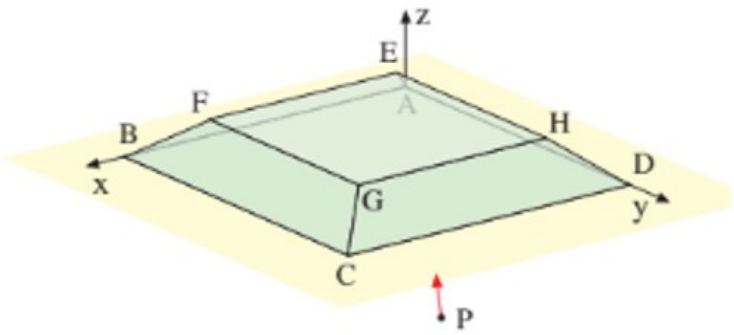
Mặt phẳng E_{ABC}: $\vec{n} = (1;1;1),\quad x + y + z - 16 = 0.$

Giao với l:

$$(24 - 4t) + (52 - 10t) + \quad 2t - 16 = 0 \Rightarrow 76 - 12t - 16 = 0 \Rightarrow t = 5$$
$$\Rightarrow N(4;2;10)$$

Khi đó: $TN \approx 11$ km

Câu 44. Cho các điểm $A(0;0;0), B(12;0;0), C(12;12;0)$ và $D(0;12;0)$ là các đỉnh của đáy hình chóp cụt bằng kính (xem hình bên).



Các đỉnh của mặt trên là $E(2;2;3), F(10;2;3), G(10;10;3)$ và $H(2;10;3)$.

Tại điểm $P(14;20;0)$ đặt một tia laser, bắn theo hướng vectơ $\vec{v}=(-3;-3;0,5)$. Tia laser sẽ cắt mặt phẳng CDH tại điểm $T(a;b;c)$, tính $a+b+2c$?

Lời giải

Trả lời: 19

Mặt phẳng CDH (chứa mặt bên $CDHG$)

$$\overrightarrow{CD}=(-12;0;0),\quad \overrightarrow{CH}=(-10;-2;3).$$
$$\vec{n}=\left[\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CH}\right]=(0;36;24)$$

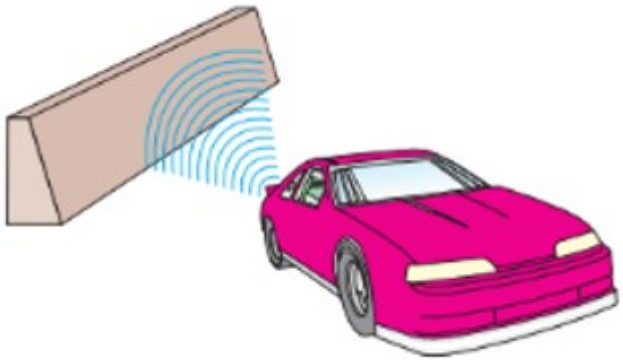
Suy ra phương trình tổng quát CDH: $3y+2z-36=0$

Tia laser từ $P(14;20;0)$ theo $\vec{v}=\left(-3;-3;\frac{1}{2}\right)$

Suy ra phương trình đường thẳng: $\begin{cases}x=14-3t\\y=20-3t\quad(t\ge 0)\\z=\frac{1}{2}t\end{cases}$

Giao với mặt phẳng $3y+2z-36=0$: $3(20-3t)+2\left(\frac{1}{2}t\right)-36=0\Rightarrow t=3\Rightarrow T\left(5;11;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 45. Khi phát triển hệ thống hỗ trợ đỗ xe ô tô, các nhà nghiên cứu sinh học đã sao chép hệ thống định vị của loài dơi và tích hợp các cảm biến tương ứng vào cản sau của xe. Các cảm biến được cài đặt sao cho chúng sẽ phát tín hiệu khi khoảng cách đến vật cản nhỏ hơn $0,3\,m$.



Một người lái xe đang lùi thẳng về phía một mặt phẳng nghiêng, được cho bởi phương trình: $E:\ 6x+2y+3z=49$. Xác định được điểm $R(a;b;c)$ trên đoạn PQ trong đó $P(6;3;1)$ và $Q(6;4;1)$ mà tại đó cảm biến bắt đầu báo động. Tính $a-b+c$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 3,05

Điểm R trên đoạn PQ khi cảm biến bắt đầu báo động

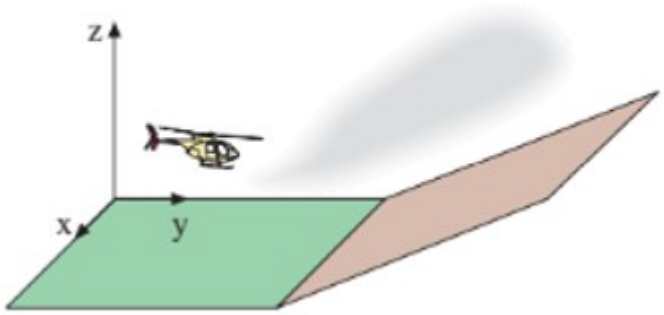
Đường thẳng PQ (dạng tham số): $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 + t, \quad (0 \le t \le 1) \\ z = 1 \end{cases}$

Khoảng cách đến E: $d = \dfrac{|36 + 2(3+t) + 3 - 49|}{7} = \dfrac{|-4 + 2t|}{7}.$

Cảm biến bắt đầu báo động nên $4 - 2t = \dfrac{21}{10} \Rightarrow t = \dfrac{19}{20}$.

Suy ra $R\left(6; 3 + \dfrac{19}{20}; 1\right) = \left(6; \dfrac{79}{20}; 1\right) \approx (6; 3{,}95; 1).$

Câu 46. Một chiếc trực thăng bay trong điều kiện tầm nhìn kém tiến về phía một sườn núi dốc lên, được mô tả bởi các điểm $P(0;5;0),\ Q(5;10;2),\ R(10;10;2)$



Trực thăng bay qua các điểm $A(1;6;1)$ và $B(2;7;1)$ (đơn vị km).

Nếu trực thăng tiếp tục giữ nguyên hướng bay hiện tại, sẽ va vào sườn núi. Vì thế để tránh tai nạn, tại điểm B phi công giữ nguyên hướng theo phương $x - y$ nhưng bay lên với góc nâng sao cho đường bay song song với sườn núi. Tính góc mà phi công đã thay đổi hướng bay tại điểm B (làm tròn kết quả đến hàng phần mười, đơn vị độ)

Lời giải

Trả lời: 15,8

$\overrightarrow{PQ} = (5;5;2),\ \overrightarrow{PR} = (10;5;2),\ \vec{n} = \left[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right] = (0;10;-25)$

Vậy phương trình mặt phẳng sườn núi: $2y - 5z - 10 = 0$

Hướng bay mới: $\vec{v} = (1;1;k), k \in \mathbb{R}$

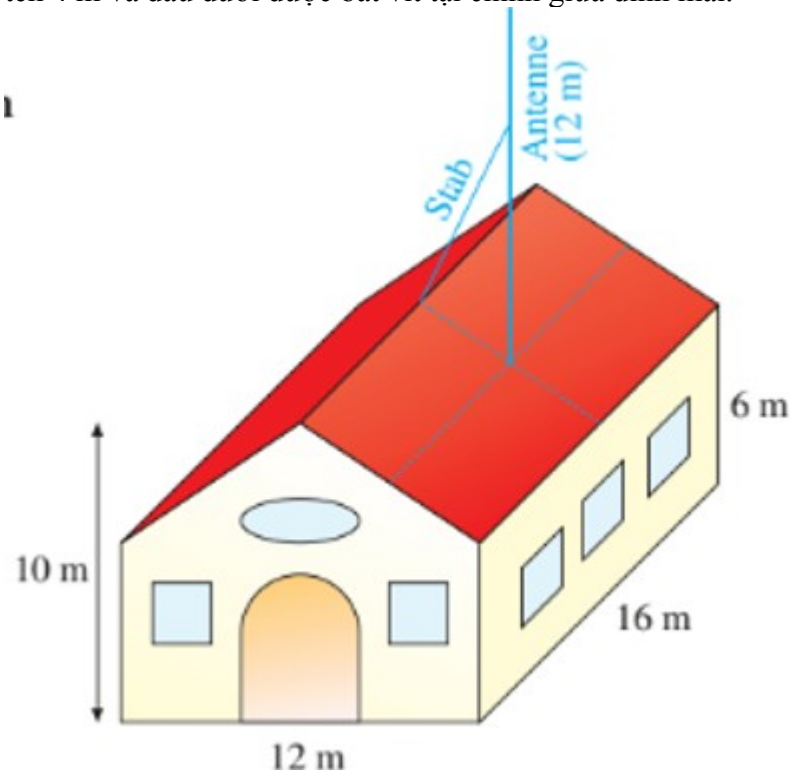
Điều kiện $\vec{v} \perp \vec{n}$: $(1;1;k) \cdot (0;2;-5) = 0 \Rightarrow 2 - 5k = 0 \Rightarrow k = \dfrac{2}{5}.$

Đường bay mới qua B: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 7 + t \\ z = 1 + \dfrac{2}{5}t \end{cases}$

Góc đối hướng tại B

Góc giữa $\vec{v}_0 = (1;1;0)$ và $\vec{v} = \left(1;1;\frac{2}{5}\right)$: $\cos\theta = \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{v}}{|\vec{v}_0||\vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2+\frac{4}{25}}} = \frac{5\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \theta \approx 15,8^\circ$

Câu 47. Chính giữa mặt bên phải của mái nhà (như hình minh họa) có một ăng-ten cao 12 m nhô ra. Ăng-ten được cố định bởi một thanh thép, đầu trên của thanh được gắn ở điểm cách đỉnh ăng-ten 4 m và đầu dưới được bắt vít tại chính giữa đỉnh mái.

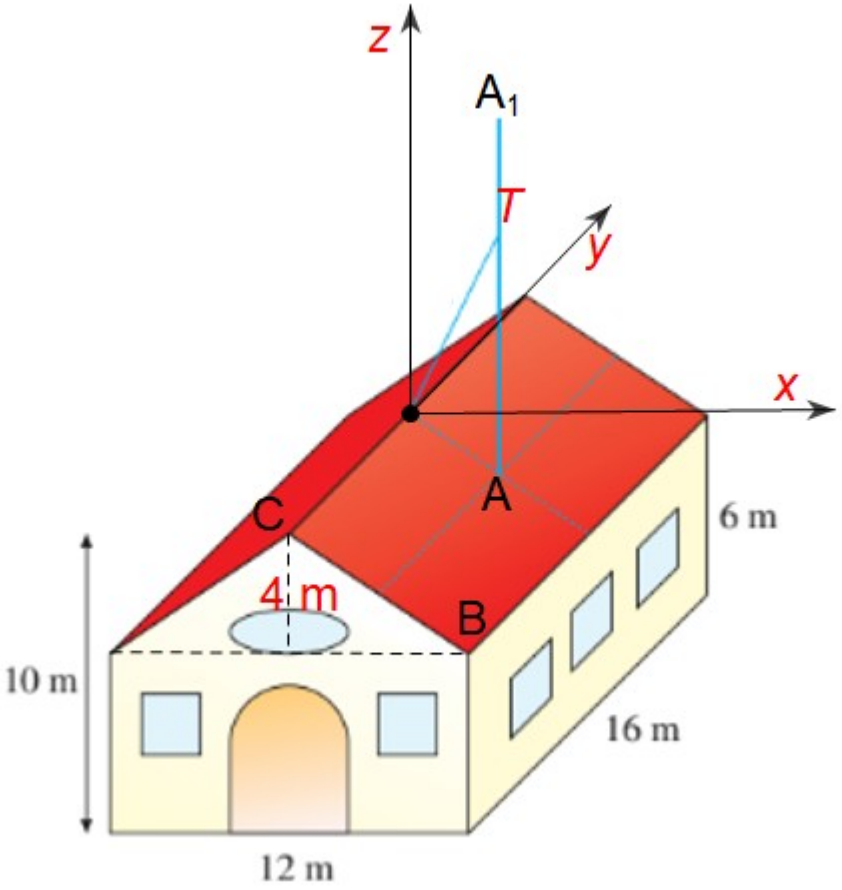


Tính góc giữa thanh thép giữa thanh thép và mặt phẳng mái nhà (gắn ăng-ten) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười, đơn vị độ)

Lời giải

Trả lời: 82,7

Đặt gốc O tại trung điểm đỉnh mái (đường nóc), Oy dọc theo đỉnh mái (chiều dài 16 m), Ox vuông góc đỉnh mái hướng sang mái phải (nửa bề rộng 6 m), Oz thẳng đứng lên. (như hình dưới)



Khi đó: Chân ăng-ten tại $A(3;0;-2)$, đỉnh $C(0;-8;0)$ và $B(6;-8;-4)$

Suy ra phương trình tổng quát của mặt phẳng mái phải: $(P):2x+3z=0 \quad (\vec{n}=(2;0;3))$

Đầu trên của thanh thép cách đỉnh ăng-ten $4m \Rightarrow$ điểm gắn trên ăng-ten: $T(3;0;6)$.

Đầu dưới của thanh bắt tại chính giữa đỉnh mái: $O(0;0;0)$.

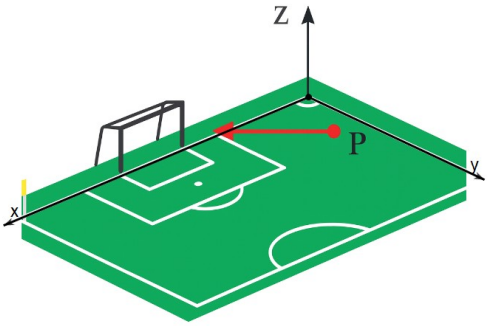
Hướng thanh thép: $\vec{w}=\overrightarrow{OT}=(3;0;6)$.

Khi đó góc thanh thép với mặt phẳng mái: $\sin\beta=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{w}|}{|\vec{n}|.|\vec{w}|}=\dfrac{|(2;0;3)\cdot(3;0;6)|}{\sqrt{13}\cdot 3\sqrt{5}}=\dfrac{8}{\sqrt{65}}\Rightarrow\beta=\arcsin\dfrac{8}{\sqrt{65}}\approx 82,7^\circ$.

Góc giữa hướng bay $\vec{v}=(-4;4;2)$ và mặt phẳng ngang $z=const$ (pháp tuyến $\vec{n}=(0;0;1)$):

$$\sin\alpha=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{n}\|\ \|\vec{v}\|}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow\alpha=\arcsin\frac{1}{3}\approx 19,47^\circ.$$

Câu 48. Một sân bóng đá rộng 60 m. Trong một quả đá phạt, bóng được sút từ vị trí $P(3;9;0)$ theo hướng của vecto $\vec{v}=(18;-6;1)$ về phía khung thành rộng $7,20m$, cao $2,40m$. Quỹ đạo bay được giả sử là một đường thẳng. Vận tốc bóng ước tính $28,5m/s$.



Tính thời gian bóng bay tới khung thành.

Lời giải

Trả lời: 1

- Quỹ đạo bóng từ $P(3;9;0)$ theo $\vec{v}=(18;-6;1)$: $\begin{cases} x=3+18t \\ y=9-6t \quad (t\ge 0) \\ z=t \end{cases}$

$|\vec{v}|=\sqrt{18^2+(-6)^2+1^2}=19\,m.$

- Mặt phẳng khung thành (biên ngang): $y=0$.

Điểm chạm mặt phẳng khung thành $y=0\Rightarrow 9-6t=0\Rightarrow t=\dfrac{3}{2}$ hay $Q\left(30;0;1,5\right)$.

Khung thành rộng $7,20\,m$, tâm ở giữa sân rộng $60\,m\Rightarrow x\in[30-3,6;30+3,6]$, cao $2,40\,m\Rightarrow 0\le z\le 2,40$. Tại $Q:x=30$ và $z=1,5\Rightarrow$ nằm trong khung thành

Thời gian bóng bay tới khung

Quãng đường $s=|\vec{v}|\,t=19\cdot\dfrac{3}{2}=28,5\,m$.

Vận tốc $28,5\,m/s\Rightarrow t_{bay}=\dfrac{28,5}{28,5}=1s$.

Câu 49. Một tàu ngầm nghiên cứu bị mất tích. Được hai tàu trên mặt biển tìm kiếm phát hiện tàu ngầm cùng lúc.

- Tàu 1 phát hiện tàu ngầm theo hướng của vectơ $\vec{v}_1=(-1;3;-1)$.

- Tàu 2 phát hiện tàu ngầm cùng lúc theo hướng của vectơ $\vec{v}_2=(4;2;-1)$.

Tàu 1 ở vị trí $P(6;2;0)$, còn tàu 2 ở vị trí $Q(-4;4;0)$ đang neo đậu.

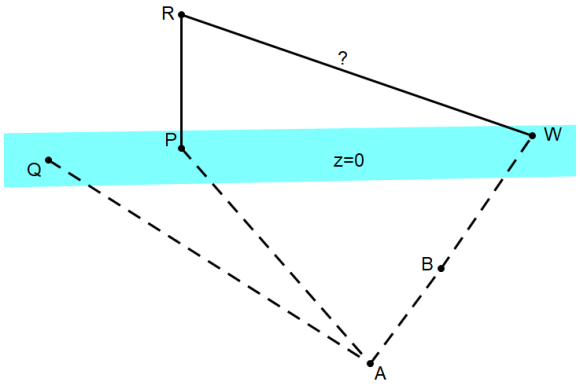
Bốn phút sau, các tàu lại đo hướng và xác định rằng tàu ngầm hiện đang ở vị trí $B(6;10;-1)$ (1 đơn vị độ dài $=100m$).

Tàu ngầm tiếp tục di chuyển thẳng từ B cho đến khi nổi lên mặt nước (tức $z=0$).

Tại thời điểm xác định vị trí *B*, một trực thăng rời khỏi tàu 1, bay thẳng đứng lên tới độ cao 1100 m (vị trí R), rồi hướng thẳng tới vị trí nổi W của tàu ngầm. Vận tốc của trực thăng là $20m/s$. Tính thời gian bay của trực thăng để đến W là bao nhiêu giây?

Lời giải

Vẽ lại mô hình bài toán



Ta tìm được phương trình đường duy chuyển của tầu 1 và 2 lần lượt là: $P:\begin{cases}x=6-t\\y=2+3t,(t\ge 0)\\z=-t\end{cases};Q:\begin{cases}x=-4+4s\\y=4+2s\\z=-s\end{cases}.(s\ge 0)$

Giải $\Rightarrow t=s=2\Rightarrow A(4;8;-2)$.

Suy ra hướng duy chuyển của tàu ngầm là $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$

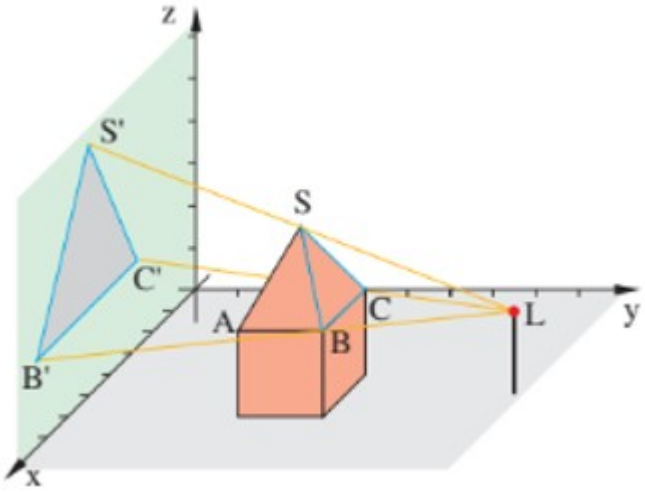
Đi thẳng theo hướng $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$ ta có được phương trình đường thẳng duy chuyển của tàu ngầm là: $\begin{cases}x=6+2u\\y=10+2u,u\in\\z=-1+u\end{cases}$. Khi nổi lên mặt biển $z=0\Rightarrow u=1\Rightarrow W(8;12;0)$

Trực thăng rời tàu 1, bay thẳng đứng lên 1100 m (điểm R) rồi bay thẳng đến W với $v=20m/s$

Tàu 1 ở $P(6;2;0)\Rightarrow R(6;2;11)$, suy ra $|RW|=\sqrt{(2)^2+(10)^2+(-11)^2}=15(dv)=1500m.$

Thời gian: $t_{\uparrow}=\frac{1100}{20}=55s,\quad t_{RW}=\frac{1500}{20}=75s\Rightarrow\sum t=130s.$

Câu 50. Trong một cảnh dựng phim có một ngôi nhà, mái nhà là một hình chóp tứ giác đều với đáy là hình vuông có các đỉnh: $A(6;4;2),\ B(6;6;2),\ C(4;6;2),\ D(4;4;2)$ và đỉnh chóp là S. Chiều cao của hình chóp mái là 2 m.



Một đèn chiếu tại $L(5;10;2)$ chiếu sáng ngôi nhà từ phía bên phải.

Trong mặt phẳng xOz có một tấm màn, trên đó sẽ xuất hiện bóng của ngôi nhà.

Biết rằng các đỉnh B , C và S có các điểm chiếu lần lượt là: B' và C' và S'

Tính $S'B'+S'C'$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 9,4

Các đỉnh đáy (hình vuông, nằm trên $z=2$): $A(6;4;2),\ B(6;6;2),\ C(4;6;2),\ D(4;4;2)$

Tâm đáy $O(5;5;2)$. Đèn chiếu $L(5;10;2)$. Màn chiếu là mặt phẳng xOz : $y=0$

Tìm đỉnh chóp S

Chiều cao mái $=2$ vuông góc với đáy $z=2\Rightarrow$ $S(5;5;4)$

Hình chiếu S' của S lên màn $y=0$ theo đèn L

Phương trình đường thẳng LS : $\begin{cases} x=5 \\ y=10-5t \\ z=2+2t \end{cases}$

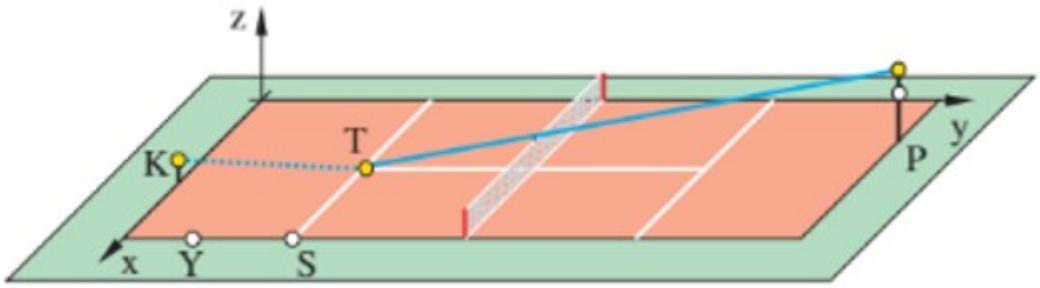
Giao với $y=0$ suy ra $t=2\Rightarrow S'(5;0;6)$

Tương tự ta tìm được $B'(7,5;0;2), C'(2,5;0;2)$

$\overrightarrow{S'B'}=(-2,5;0;4), \overrightarrow{S'C'}=(2,5;0;4)$

$\Rightarrow |S'B'|=|S'C'|=\sqrt{(2,5)^2+4^2}=\dfrac{\sqrt{89}}{2}\Rightarrow S'B'+S'C'=\sqrt{89}\approx 9,4$

Câu 51. Sân quần vợt được mô hình hóa lý tưởng, có chiều dài 24 m và chiều rộng 10 m. Các ô giao bóng dài 6 m và rộng 5 m. Lưới cao liên tục 1 m. Mọi cú đánh đều bay theo đường thẳng.



Một vận động viên đứng ở vạch cuối sân tại điểm $P(3;24;0)$ và cố gắng đánh quả bóng với vận tốc 144 km/h ở độ cao $3,10\,m$ sao cho bóng rơi đúng vào điểm $T(5;6;0)$ của ô giao bóng. Sau khi chạm đất, bóng phản xạ theo góc α (giữ nguyên vận tốc, không đổi hướng ngang). Tại vị trí K trên vạch cuối sân bên kia đối thủ sẽ đánh trả, hãy tính thời gian đối thủ có để phản ứng là bao nhiêu giây? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,15

Quỹ đạo từ A đến T: $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 24-18t \\ z = 3,10-3,1t \end{cases} \quad (0 \le t \le 1)$ (hướng $\vec{v} = (2;-18;-3,1)$).

Sau nảy bóng: phản xạ giữ nguyên vận tốc, không đổi hướng ngang.

Hướng mới: $\vec{v}' = (2;-18;3,1)$. Vậy phương trình mới của quả bóng là $\begin{cases} x = 5+2s \\ y = 6-18s, (s \in \mathbb{R}) \\ z = 3,1s \end{cases}$

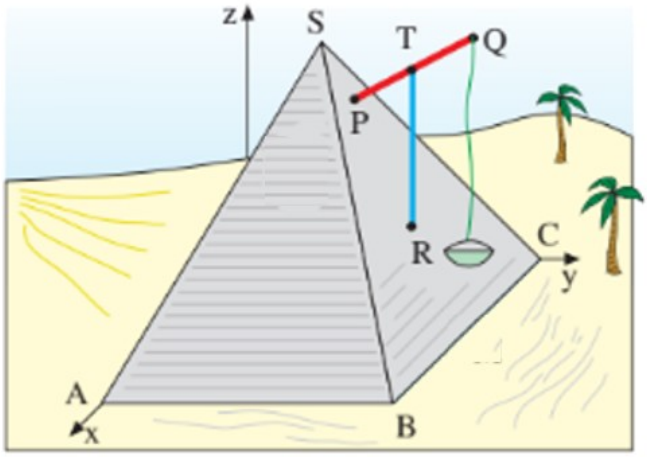
Điểm K trên vạch cuối sân bên kia thuộc mặt phẳng $y = 0$: Suy ra

$$6-18s = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{3} \Rightarrow K\left(\frac{17}{3};0;\frac{31}{30}\right).$$

Quãng đường $TK = \sqrt{\left(\frac{17}{3}-5\right)^2 + 6^2 + \left(\frac{31}{30}\right)^2} = \frac{7\sqrt{689}}{30}$.

Vận tốc $144km/h = 40m/s \Rightarrow$ thời gian đối thủ có để phản ứng: $t = \frac{TK}{40} \approx 0,15s.$

Câu 52. Một kim tự tháp cổ có các đỉnh $A(100;0;0), B(100;100;0), C(0;100;0), D(0;0;0)$ và đỉnh $S(50;50;100)$. Từ mặt bên BCS nhô ra một thanh PQ thẳng đứng (là một phần của cơ cấu nâng), trung điểm T của thanh PQ được đỡ bởi cột thẳng đứng RT. Biết $P(50;60;80), Q(50;100;100)$.Tính chiều dài cột TR.



Lời giải

Trả lời: 50

Mặt phẳng (BCS):

$\overrightarrow{BC}=(-100;0;0), \overrightarrow{BS}=(-50;-50;100), \vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BS}\right]=(0;10000;5000)\sim(0;2;1)$

Vậy phương trình tổng quát: $(BCS): 2y+z-200=0$.

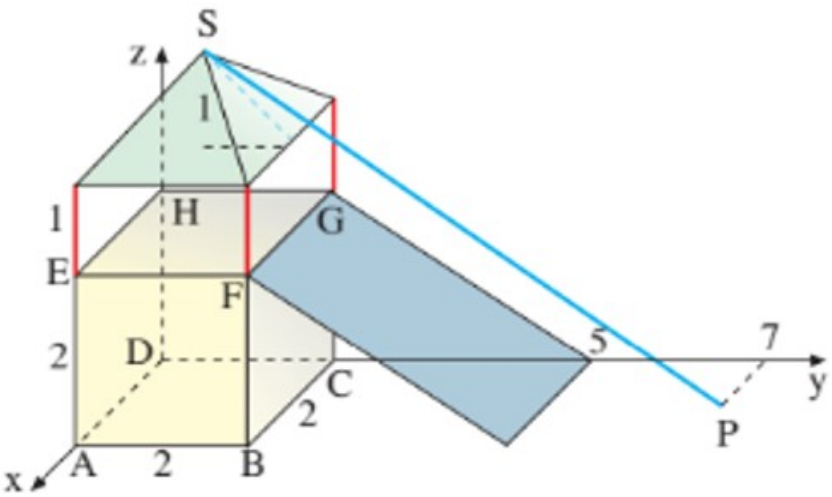
Trung điểm T của $PQ: T(50;80;90)$.

Cột RT thẳng đứng (song song Oz) có phương trình $g: \begin{cases} x=50 \\ y=80 \\ z=90+\lambda \end{cases}, (\lambda \in \mathbb{R})$

Giao với $(BCS): 2\cdot 80+(90+\lambda)-200=0 \Rightarrow \lambda=-50$.

Suy ra $R(50;80;40) \Rightarrow TR=50.$

Câu 53. Tháp gồm một khối lập phương, trên đó gắn thêm một khung hộp chữ nhật, và phía trên là một khối chóp tứ giác đều. Tại độ cao bằng chiều cao khối lập phương, có gắn một mặt phẳng trượt hình chữ nhật (xem hình, các kích thước tính bằng mét).



Từ đỉnh S có buộc một sợi dây xuống điểm $P(1;7;0)$ làm dây leo.

Trên mặt phẳng trượt, có một đứa trẻ đứng thẳng tại vị trí chính giữa tấm trượt và với thẳng tay (vuông góc với mặt đất) nắm được dây leo. Tính chiều cao tay vịn của đứa trẻ tính từ mặt đất.

Lời giải

Trả lời: 1,6

Ta xác định được tọa độ các điểm như sau $D(0;0;0), A(2;0;0), B(2;2;0), C(0;2;0); H(0;0;2), E(2;0;2), F(2;2;2), G(0;2;2), S(1;1;4)$

Phương trình đường thẳng $SP: \begin{cases} x = 1, \\ y = 1 + 6t, \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4 - 4t \end{cases}$

Ta thấy được mặt phẳng trượt đi qua $F, G, K(0;5;0)$ nên phương trình mặt phẳng trượt là: $2y + 3z - 10 = 0$

Điểm chính giữa tấm trượt có tọa độ: $I(1;3,5;1)$

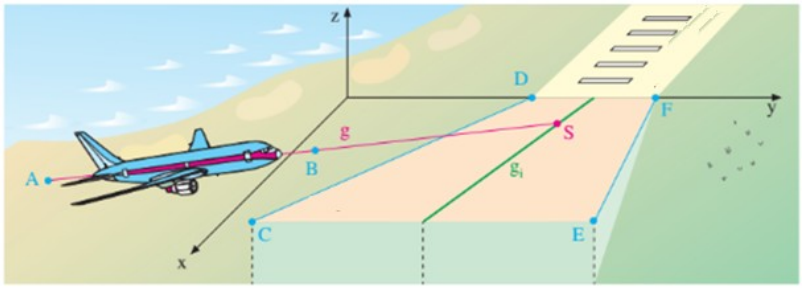
Đứa trẻ đứng thẳng tại vị trí chính giữa tấm trượt và với thẳng tay (vuông góc với mặt đất) thuột đường thẳng có vecto chỉ phương là $(0;0;1)$ và đi qua $I(1;3,5;1)$:

Phương trình $\Delta: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3,5 \\ z = 1 + k \end{cases}, (k \in \mathbb{R})$

Tìm giao điểm Δ với $SP: \begin{cases} 1 = 1 \\ 3,5 = 1 + 6t \\ 1 + k = 4 - 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2,4 \\ k = 0,6 \end{cases}$

Suy ra chiều cao tay vịn của đứa trẻ tính từ mặt đất là 1,6m

Câu 54. Một máy bay đang trong giai đoạn tiếp cận để hạ cánh. Nó bay theo đường thẳng g đi qua hai điểm $A(25;2;5)$ và $B(15;7;3)$.



Khu vực tiếp cận hạ cánh được giới hạn bởi hai đường thẳng g_1 và g_2, lần lượt đi qua các điểm $C(10;4;2), D(0;10;0)$ và $E(10;20;2), F(0;14;0)$ (các số đo tính bằng km).

Đường thẳng g_i đi ở giữa khu vực tiếp cận được coi là đường lý tưởng cho hạ cánh. Xác định phương trình g_i. Đường bay g của máy bay cắt đường g_i tại S. Biết vận tốc của máy bay là $500 km/h$. Tính thời gian từ khi máy bay ở điểm A cho đến khi chạm đường lý tưởng g_i là bao nhiêu giây? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 164

Đường bay g của máy bay (qua A,B): $g:\begin{cases}x=25-10t\\y=2+5t\\z=5-2t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$ (hướng $\vec{v}=(-10;5;-2)$).

"Đường lý tưởng" g_i đi giữa khu vực tiếp cận: hay g_i đi qua trung điểm CE,DF (điểm đầu ($10;12;2$), cuối ($0;12;0$)).

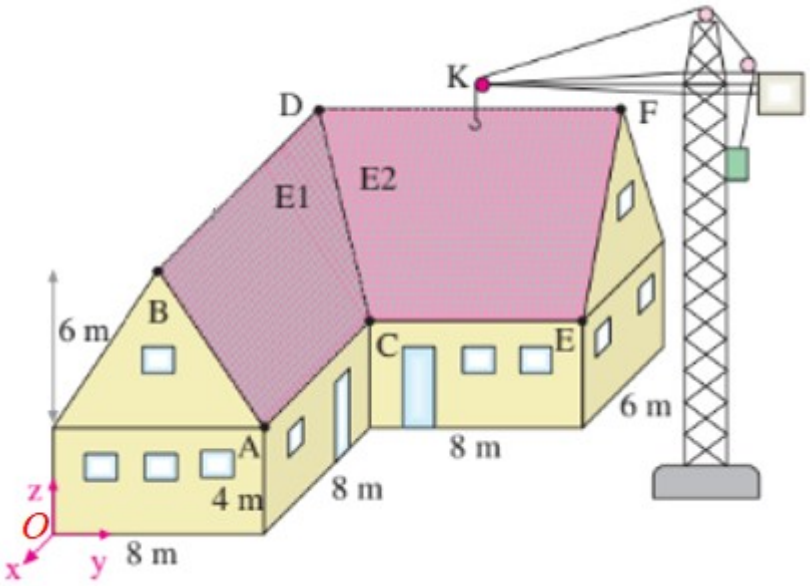
Ta được phương trình: $g_i:\begin{cases}x=10-10u\\y=12\\z=2-2u\end{cases}\quad(u\in\mathbb{R})$

Giao $g\cap g_i$: có $2+5t=12\Rightarrow t=2\Rightarrow S(5;12;1)$. Vậy g cắt g_i tại $S(5;12;1)$

Ta có $SA=\sqrt{(5-25)^2+(12-2)^2+(1-5)^2}=2\sqrt{129}$

Thời gian bay (vận tốc $500km/h$) là: $t=\dfrac{2\sqrt{129}}{500}.3600\approx 164$ (giây)

Câu 55. Một ngôi nhà góc có kích thước như hình bên.



Đầu tay cần cẩu có tọa độ $K(11;12;26)$. Từ đó kéo một sợi dây tới mái E_2 và xoay qua tiếp tục kéo một sợi dây khác với mái E_1. Tính tổng chiều dài tối thiểu các sợi dây đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 48,2

$O(0;0;0), A(0;8;4), B(0;4;10), C(-8;8;4), E(-8;16;4), F(-11;16;10)$

$\overrightarrow{AB}=(0,-4,6), \overrightarrow{AC}=(-8,0,0) \Rightarrow \vec{n}_{E_1}=\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]=(0,3,2) \Rightarrow E_1: 3y+2z-32=0.$

$\overrightarrow{CE}=(0,8,0), \overrightarrow{CF}=(-3,8,6) \Rightarrow \vec{n}_{E_2}=(2,0,1) \Rightarrow E_2: 2x+z+12=0.$

- Trên E_1 đường nóc g_{BD} đi qua B và vectơ chỉ phương là $(1;0;0)$

→ đường nóc: $g_{BD}: \begin{cases} x=t, \\ y=4, \\ z=10 \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

- Trên E_2 đường nóc g_{BD} đi qua F và vectơ chỉ phương là $(0;1;0)$

→ đường nóc: $g_{FD}: \begin{cases} x=-11, \\ y=s, \\ z=10 \end{cases} (s \in \mathbb{R}).$

Giao điểm hai đường nóc tại D

Giải hai hệ trên: $x=-11, y=4, z=10 \Rightarrow D(-11;4;10)$.

Ta tìm được hình chiếu của K lên E_1 là $K_1=\left(11,-\frac{12}{13},\frac{226}{13}\right)$

có $y<4 \Rightarrow$ ngoài tứ giác $\Rightarrow$ độ dài ngắn nhất xảy ra trên biên.

- Khoảng cách từ K đến các cạnh đạt min tại đỉnh $B(0,4,10)$:

$KB=\sqrt{(11-0)^2+(12-4)^2+(26-10)^2}=\sqrt{441}=21m.$

- Ta tìm được hình chiếu của K lên E_2 là $K_2=(-13,12,14)$

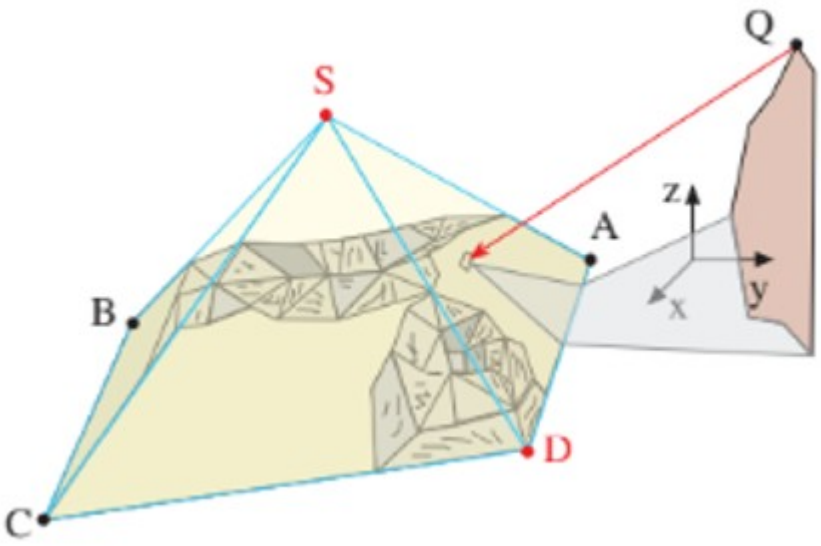
có $x=-13<-11 \Rightarrow$ nằm ngoài tứ giác $\Rightarrow$ độ dài ngắn nhất xảy ra trên biên.

- Xét cạnh $DF: \begin{cases} x=-11 \\ y=4+12t, 0 \le t \le 1 \\ z=10 \end{cases}$.

Ta có: Khoảng cách từ K đến $DF=\sqrt{22^2+(12-4-12t)^2+16^2}$ nhỏ nhất khi $t=\frac{2}{3} \Rightarrow R=(-11,12,10)$, suy ra $KR=\sqrt{22^2+0^2+16^2}=2\sqrt{185} \approx 27,2m.$

Tổng độ dài tối thiểu hai sợi dây $L_{\min} \approx 48,2m.$

Câu 56. Các điểm $A(0;-1;0), B(1;-4;0)$ và $C(4;-3;0)$ là các đỉnh thu được của đáy một kim tự tháp khối chóp tứ giác đều, đã bị sụp một phần và cần được phục dựng. Mỗi đơn vị trong hệ tọa độ ứng với 100 m.



Gọi tâm M của hình vuông và tọa độ đỉnh D còn thiếu. Trên đỉnh M theo phương thẳng đứng là đỉnh S của kim tự tháp, với chiều cao 200 m. Theo mô tả, ánh sáng mặt trời vuông góc với mặt bên DAS chiếu qua điểm $Q\left(\frac{1}{2};\frac{5}{3};\frac{7}{2}\right)$ vào một lối vào bí mật của kim tự tháp. Xác định được tọa độ điểm $P(a;b;c)$ là vị trí ban đầu của lối vào bí mật này. Tính $2a+3b+c$

Lời giải

Trả lời: 0

Vì A,B,C là ba đỉnh liên tiếp của hình vuông, $D=(3,0,0)$

Tâm hình vuông: $M=(2,-2,0).$

Cao kim tự tháp $=200m=2$ (đv) theo phương thẳng đứng $\Rightarrow S(2,-2,2)$

Có $\overrightarrow{DA}=(-3,-1,0),\overrightarrow{DS}=(-1,-2,2).\Rightarrow$ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DS}\right]=(-2,6,5)$

Suy ra phương trình mặt phẳng $(DAS):-2x+6y+5z+6=0$

Vì ánh sáng mặt trời vuông góc với mặt DAS nên hướng tia là $\vec{n}=(-2,6,5)$

Đường thẳng đi qua Q, vuông góc với DAS có phương trình: $\ell:\begin{cases}x=\frac{1}{2}-2t\\ y=\frac{5}{3}+6t\\ z=\frac{7}{2}+5t\end{cases},t\in\mathbb{R}$

Giao với $DAS:-2x+6y+5z+6=0$ cho $t=-\frac{1}{2}$.

Suy ra $P\left(\frac{3}{2},-\frac{4}{3},1\right)$.

Câu 57. Tháp đôi Puerta de Europa, Tây Ban Nha có mặt tiền nghiêng, được mô hình hóa bởi mặt phẳng $(P):x-y+z+1=0$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị mét). Chủ tòa nhà muốn treo một biển quảng cáo lên mặt tường này, nhưng vì vị trí có cửa sổ thông gió nên phải dùng cơ cấu giàn giáo như sau:

1. Khoan lỗ và cắm thanh sắt

- Khoan hai lỗ trên tường, cắm vào đó hai thanh sắt cố định sao cho đầu mút của mỗi thanh nhô ra phía ngoài.

- Gọi hai đầu mút lần lượt là điểm A và điểm B, với tọa độ $A(1;-2;0), B(2;1;-1)$.

2. Nối khung ngang

- Hàn một thanh sắt ngang nối từ A đến B. Đây là thanh chịu lực chính để treo biển.

3. Gắn biển quảng cáo

- Hàn khung biển vào thanh ngang, xem biển như một tấm bản mỏng nằm trên cùng mặt phẳng (Q).

Để biển áp sát tường nhất - vừa tăng tính thẩm mỹ, vừa giảm lực gió - ta cần điều chỉnh sao cho góc θ giữa mặt phẳng biển (Q) và mặt phẳng tường (P) là nhỏ nhất.

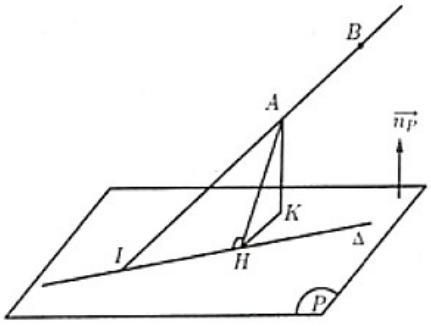
Giả sử phương trình tổng quát của biển hiệu là $(Q):ax+by+cz+d=0,(a;b;c;d\in\square)$.

Hãy tính tổng $a+b+c+d$

Lời giải

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;0)$ và $B(2;1;-1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x-y+z+1=0$. Biết mặt phẳng (Q) đi qua A,B đồng thời tạo với (P) một góc nhỏ nhất có phương trình là $ax+by+cz+d=0$ với $a,b,c,d\in\square$. Tính giá trị đại lượng $a+b+c+d$.

Trả lời: 3



Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;3;-1)$ là véc tơ chỉ phương của AB.

Véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}$ của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;1)$.

Vậy $\overrightarrow{n_P}\cdot\overrightarrow{AB}=-3\neq 0\Rightarrow$ đường thẳng AB cắt (P) tại điểm I.

Gọi $\Delta=P\cap Q$. Giả sử H và K lần lượt là hình chiếu của A trên (P) và Δ.

Ta có $\widehat{AKH}$ là góc giữa (Q) và (P). Lại thấy $\tan\widehat{AKH}=\dfrac{AH}{AK}\geq\dfrac{AH}{AI}=$ const

Vậy $\widehat{AKH}\min\Leftrightarrow\tan\widehat{AKH}\min\Leftrightarrow\tan\widehat{AKH}=\dfrac{AH}{AI}\Leftrightarrow K\equiv I\Leftrightarrow\Delta\perp AB$

Vì $\Delta\perp AB;\Delta\perp\overrightarrow{n_P}$ vậy $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]$ là véc tơ chỉ phương của Δ.

Dễ thấy $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=\left(\begin{vmatrix}3&-1\\-1&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&3\\1&-1\end{vmatrix}\right)=(2;-2;-4)//(1;-1;-2)=\vec{u}$

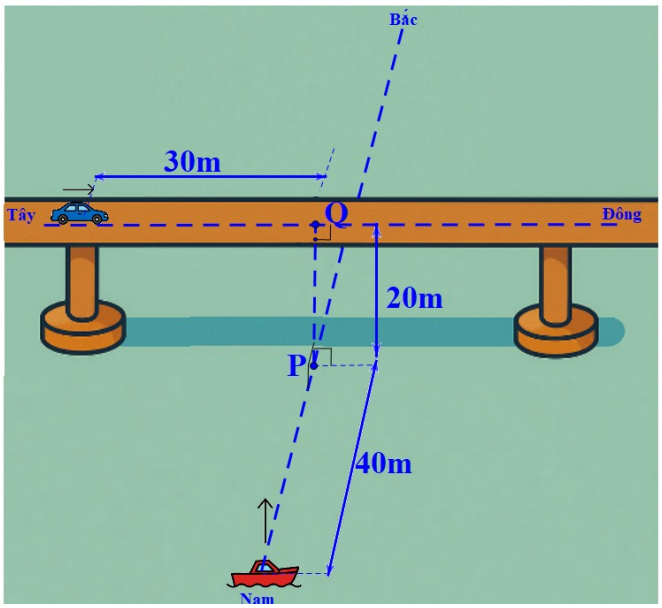
Vậy (Q) nhận $\vec{u},\overrightarrow{AB}$ làm cặp véc tơ chỉ phương

$\Rightarrow\overrightarrow{n_Q}=[\vec{u},\overrightarrow{AB}]=\left(\begin{vmatrix}-1&-2\\3&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2&1\\-1&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-1\\1&3\end{vmatrix}\right)=(7;-1;4)$

Mặt khác $A\in Q\Rightarrow(Q):7(x-1)-(y-3)+4(z+1)=0$ hay $(Q):7x-y+4z-9=0$

Theo đề bài $Q:ax+by+cz+d=0\Rightarrow a=7;b=1;c=4;d=-9\Rightarrow a+b+c+d=3$

Câu 58. Một chiếc thuyền đang chuyển động đều với vận tốc 10 m/s theo hướng từ Nam lên Bắc trên mặt hồ. Trên cây cầu nằm cách mặt hồ 20m theo phương thẳng đứng, có một chiếc ô tô chuyển động đều với vận tốc 20m/s theo hướng từ Tây sang Đông.



Như hình vẽ, tại thời điểm hiện tại, thuyền ở vị trí cách điểm P (*nằm dưới cầu*) 40 m theo phương Nam, còn ô tô ở vị trí cách Q (*trên cầu*) 30 m theo phương Tây.

(Bỏ qua kích thước của thuyền và ô tô; đoạn thẳng PQ luôn vuông góc với hướng chuyển động của cả thuyền và ô tô)

Hỏi: Khoảng cách giữa thuyền và ô tô đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

Trả lời: 30

Chọn hệ tọa độ như sau trên mặt phẳng ngang (trục x hướng Đông, trục y hướng Bắc, gốc O tại điểm P ngay trên mặt nước, bên dưới điểm Q trên cầu):

- Điểm B_1 là vị trí thuyền lúc $t=0$ có tọa độ $(0;-40;0)$ vì thuyền cách P $40\,m$ theo phương Nam

- Điểm C_1 vị trí ô tô lúc $t=0$ có tọa độ $(-30;0;20)$ vì ô tô cách Q $30\,m$ về phía Tây và cao 20m so với mặt nước.

Khi t giây trôi qua:

- Thuyền đi lên Bắc với vận tốc $10\,m/s \Rightarrow$ vị trí $B(t)=(0;-40+10t;0)$

- Ô tô chạy về Đông với vận tốc $20\,m/s \Rightarrow$ vị trí $C(t)=(-30+20t;0;20)$.

Khoảng cách bình phương giữa thuyền và ô tô là $D^2(t)=(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2=(-30+20t)^2+(0-(-40+10t))^2+(20-0)^2.$

Do đó $D^2(t)=400t^2-1200t+900+100t^2-800t+1600+400=500t^2-2000t+2900.$

Hàm $D^2(t)$ là hàm bậc hai nên đạt cực tiểu tại $t_0=\dfrac{-(-2000)}{2\cdot 500}=\dfrac{2000}{1000}=2$ (giây).

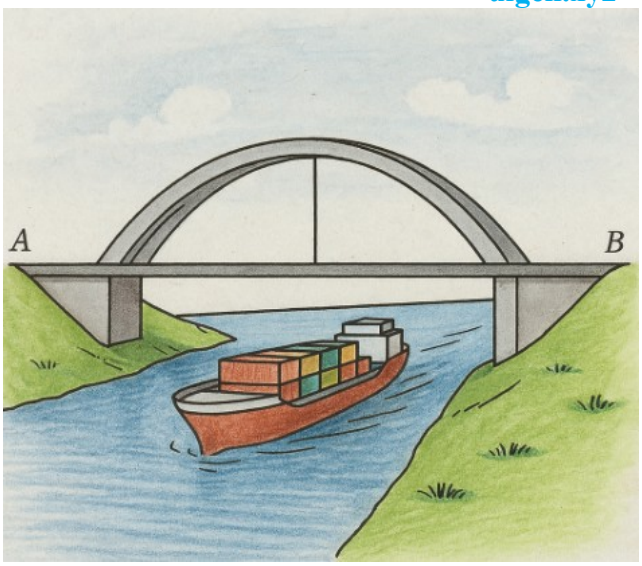
Giá trị nhỏ nhất: $D^2_{\min}=500\cdot(2)^2-2000\cdot 2+2900=2000-4000+2900=900\rightarrow D_{\min}=\sqrt{900}=30(m).$

Vậy khoảng cách nhỏ nhất là 30m.

Câu 59. Một cây cầu được thiết kế theo dạng parabol đối xứng, bắc ngang con sông. Trong đó:
- Dòng sông chảy theo trục Ox, mặt nước sông nằm trong mặt phẳng $z=0$,

- Cầu nằm trong mặt phẳng yOz, nối từ: $A(0;-5;0)$ (bờ trái sông) đến $B(0;5;0)$ (bờ phải sông)

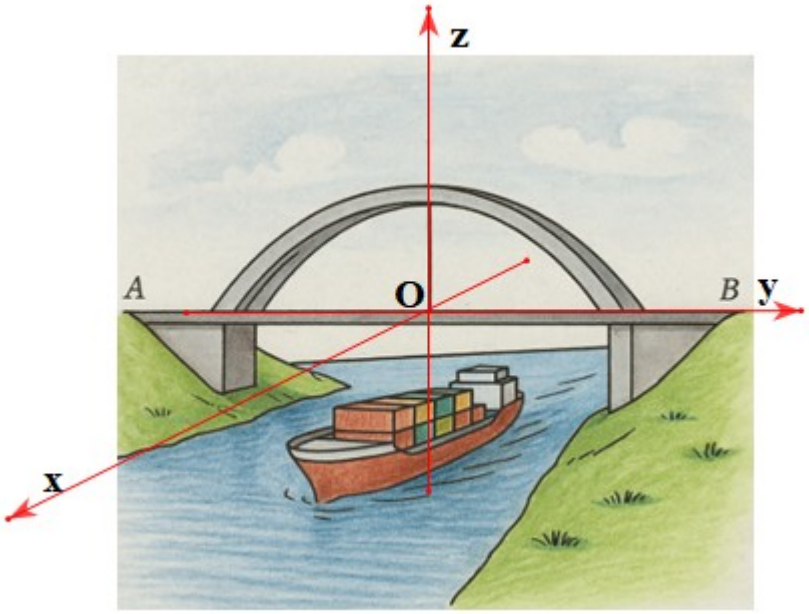
- Cầu có dạng parabol đối xứng qua trục Oz, với đỉnh tại $H(0;0;h)$



- Trên sông có tàu container cao 6 mét, thân tàu rộng 4 mét và cần ít nhất 1 mét khoảng trống chiều cao an toàn, tức yêu cầu chiều cao cầu tối thiểu là 7 mét tại đoạn giữa sông từ $y=-2$ đến $y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của h để đảm bảo chiều cao cầu từ $y=-2$ đến $y=2$ luôn lớn hơn hoặc bằng 7 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 8,33



Vì cầu nằm trong mặt phẳng yOz, ta xét phương trình: $z=ay^2+by+c$

Do parabol đối xứng qua trục Oz, nên $b=0 \Rightarrow z=ay^2+h(*)$

Vì cầu đi qua hai điểm: $A(0;-5;0)$, $B(0;5;0)$

Thay vào phương trình (*), ta được: $\begin{cases}0=a(-5)^2+h=25a+h\\0=a(5)^2+h=25a+h\end{cases}\Rightarrow 25a+h=0\Rightarrow a=-\dfrac{h}{25}$

Suy ra $z=-\dfrac{h}{25}y^2+h$

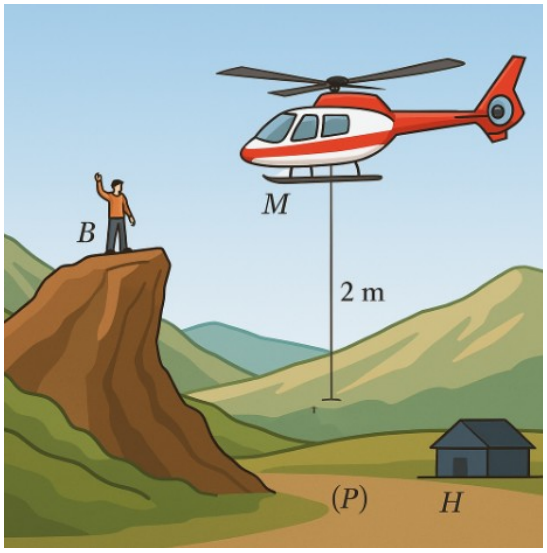
Để tàu đi qua được cầu thì: $z(y)=-\frac{h}{25}y^2+h\geq 7$ với $y\in[-2;2]$

Vì $z(y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $y=\pm 2\Rightarrow z_{\min}=-\frac{h}{25}\cdot 4+h=\frac{21h}{25}$

Hay $\frac{21h}{25}\geq 7\Rightarrow h\geq \frac{7\cdot 25}{21}=\frac{175}{21}\Rightarrow h\geq \frac{175}{21}\approx 8,33(m)$

Câu 60. Một vùng núi được mô phỏng bằng mặt phẳng địa hình: $(P):\ x+2y-z=0$
Một người bị nạn đang đứng tại điểm $B(2;1;6)$ không nằm trên mặt đất, mà đứng trên một mỏm đá cao.

Một trực thăng xuất phát từ căn cứ tại điểm $H(1082;-809;1624)$, bay theo đường thẳng hướng đến người bị nạn. Tuy nhiên, để đảm bảo an toàn, trực thăng chỉ được phép dừng lại tại một điểm M trên đường bay, sao cho: M cách mặt phẳng địa hình (P) đúng 2 mét. Sau đó từ điểm M (trong đó hoành độ, tung độ và cao độ được làm tròn đến hàng phần trăm), trực thăng thả cáp cứu hộ hỗ trợ người bị nạn



Hãy **tính độ dài đoạn bay** từ căn cứ H đến điểm tiếp cận M (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời: 2104

Ta có: $\vec{u}=\overrightarrow{HB}=(2-1082;1+809;6-1624)=(-1080;810;-1618)$

Phương trình tham số của đường thẳng: $\begin{cases}x=1082-1080t\\y=-809+810t,\quad t\in\mathbb{R}\\z=1624-1618t\end{cases}$

Công thức khoảng cách từ điểm $M(x,y,z)$ đến mặt phẳng $x+2y-z=0$:

$$d=\frac{|x+2y-z|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|x+2y-z|}{\sqrt{6}}=2\Rightarrow|x+2y-z|=2\sqrt{6}$$

Thay tọa độ điểm $M \in d$: $x+2y-z=(1082-1080\,t)+2(-809+810\,t)-(1624-1618\,t)$

$=1082-1080\,t-1618+1620\,t-1624+1618\,t=-2160+2158\,t$

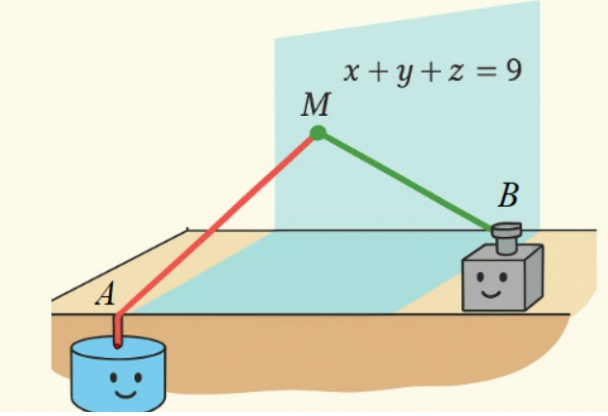
$\rightarrow |2158t-2160|=2\sqrt{6} \Rightarrow 2158t-2160=\pm 2\sqrt{6} \Rightarrow t=\dfrac{2160\pm 2\sqrt{6}}{2158}$

Chọn nghiệm nhỏ hơn (vì M nằm giữa H và B): $t=\dfrac{2160-2\sqrt{6}}{2158}$

Tại đây ta tìm được tọa độ điểm đã được làm tròn đến hàng phần trăm là: $M(3,45;-0,09;8,17)$

Suy ra: $HM \approx 2104$

Câu 61. Một nhà máy cần nối một đường ống nước thẳng từ **bồn chứa tại điểm** $A(0;0;0)$ đến **máy xử lý đặt tại điểm** $B(4;3;1)$. Do địa hình bị chắn giữa hai điểm, đường ống bắt buộc phải đi **qua một điểm** M nằm trên mặt phẳng: $(P): x+y+z=9$ rồi mới đến điểm B.

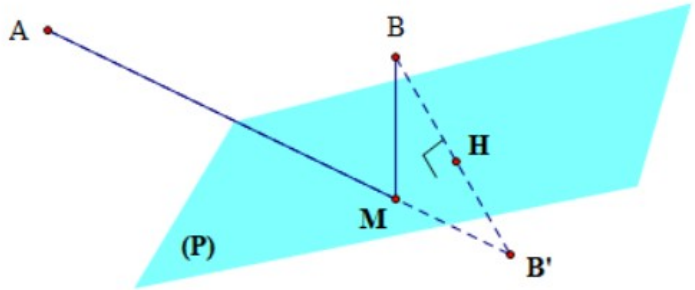


Biết rằng hệ trục tọa độ $Oxyz$ được gắn trong mô hình nhà máy với mỗi đơn vị tương ứng 1 mét. Hỏi chiều dài ống nước nhỏ nhất mà nhà máy cần nối bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

Trả lời: 6,16

Tổng độ dài hai đoạn thẳng $AM+MB$ là ngắn nhất khi điểm M nằm trên đường thẳng AB', với B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (P).



Gọi B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (P).

Khi đó toạ độ điểm B' là: $(4;3;1)+\frac{2}{3}(1;1;1)=\left(\frac{14}{3};\frac{11}{3};\frac{5}{3}\right)$

Ta có: $AB':\begin{cases}x=\frac{14}{3}t\\y=\frac{11}{3}t\\z=\frac{5}{3}t\end{cases}$, gọi $M\in AB'\Rightarrow M\left(\frac{14}{3}t;\frac{11}{3}t;\frac{5}{3}t\right)$, vì $M\in P$ nên $\frac{14t}{3}+\frac{11t}{3}+\frac{5t}{3}=9\Rightarrow t=\frac{9}{10}$. Vậy $M\left(\frac{21}{5};\frac{33}{10};\frac{3}{2}\right)$

Khi đó: $AM=\sqrt{\frac{3078}{100}};BM=\sqrt{\frac{38}{100}}$ ta có: $\sqrt{\frac{3078}{100}}+\sqrt{\frac{38}{100}}\approx 6,16$ (m)