

CÁC DẠNG TOÁN BÀI BA ĐƯỜNG CÔNIC

Dạng 1: Xác định các yếu tố của Elip

Phương pháp: Cho Elip có phương trình chính tắc: $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = a^2 - c^2$.

- Tiêu điểm $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$.
- Tọa độ các đỉnh $A_1(-a; 0), A_2(a; 0), B_1(0; -b), B_2(0; b)$.
- Độ dài trục lớn $2a$.
- Độ dài trục bé $2b$.
- Tiêu cự $2c$.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tọa độ các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip: $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Lời giải

Từ phương trình của $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$ (E) ta có $a = 2, b = 1$ suy ra $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$.

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1(-2; 0); A_2(2; 0); B_1(0; -1); B_2(0; 1)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 4$, độ dài trục bé $B_1B_2 = 2$.

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{3}$, tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3}; 0); F_2(\sqrt{3}; 0)$.

Tâm sai của $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$ là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 2: Tìm tọa độ các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip: $(E): 4x^2 + 25y^2 = 100$.

Lời giải

Ta có $4x^2 + 25y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ suy ra $a = 5; b = 2$ nên $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{21}$.

Do đó tọa độ các đỉnh là $A_1(-5; 0); A_2(5; 0); B_1(0; -2); B_2(0; 2)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 10$, độ dài trục bé $B_1B_2 = 4$.

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{21}$, tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{21}; 0); F_2(\sqrt{21}; 0)$.

Tâm sai của (E) là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Bài tập 3: Tìm tọa độ các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip: (E): $4x^2 + 9y^2 = 1$.

Lời giải

Ta có $4x^2 + 9y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$ suy ra $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{3}$ nên $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

Do đó tọa độ các đỉnh là $A_1\left(-\frac{1}{2}; 0\right); A_2\left(\frac{1}{2}; 0\right); B_1\left(0; -\frac{1}{3}\right); B_2\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 1$, độ dài trục bé $B_1B_2 = \frac{2}{3}$.

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c = \frac{2\sqrt{5}}{6}$, tiêu điểm là $F_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}; 0\right); F_2\left(\frac{\sqrt{5}}{6}; 0\right)$.

Tâm sai của (E) là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Bài tập 4: Tìm tâm sai của Elip biết:

- Mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc 60° .
- Đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60° .
- Khoảng cách giữa hai đỉnh trên hai trục bằng hai lần tiêu cự

Lời giải

a) Từ giả thiết, ta có: $\tan 30^\circ = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c \cdot \tan 30^\circ$ suy ra: $e = \frac{c}{a}$

$$\Leftrightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{b^2 + c^2} = \frac{c^2}{c^2 \cdot \tan^2 30^\circ + c^2} = \frac{1}{\tan^2 30^\circ + 1} = \cos^2 30^\circ \Leftrightarrow e = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Từ giả thiết, ta có $\cot 30^\circ = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c \cdot \cot 30^\circ$ suy ra: $e = \frac{c}{a}$

$$\Leftrightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{b^2 + c^2} = \frac{c^2}{c^2 \cdot \cot^2 30^\circ + c^2} = \frac{1}{\cot^2 30^\circ + 1} = \sin^2 30^\circ \Leftrightarrow e = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

c) Từ giả thiết, ta có: $A_2B_2 = 4c$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 4c \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 16c^2 \Leftrightarrow c^2 + b^2 + b^2 = 16c^2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{15c^2}{2}$$

$$\text{Suy ra: } e = \frac{c}{a} \Leftrightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{b^2 + c^2} = \frac{c^2}{\frac{15c^2}{2} + c^2} = \frac{2}{17} \Leftrightarrow e = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

Bài tập 5: Cho $(E): 16x^2 + 25y^2 = 100$ và điểm M thuộc (E) có hoành độ bằng 2. Tính tổng khoảng cách từ M đến 2 tiêu điểm của (E)

Lời giải

$$\text{Ta có: } (E): \frac{x^2}{\frac{100}{16}} + \frac{y^2}{\frac{100}{25}} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{100}{16} \\ b^2 = \frac{100}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

Theo định nghĩa Elip thì với mọi điểm $M \in (E)$ ta có: $MF_1 + MF_2 = 2a = 5$.

Bài tập 6: Cho $9x^2 + 25y^2 = 225$. Tính diện tích hình chữ nhật cơ sở ngoại tiếp (E) là

Lời giải

$$\text{Phương trình chính tắc của } (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$$

Diện tích hình chữ nhật cơ sở ngoại tiếp (E) là $S = 4ab = 60$.

Bài tập 7: Trong hệ trục tọa độ (Oxy) , cho elip $(E): \frac{4x^2}{25} + \frac{4y^2}{9} = 1$. Tính độ dài tiêu cự của (E)

Lời giải

$$\text{Ta có } (E): \frac{4x^2}{25} + \frac{4y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$$

. Vậy độ dài tiêu cự là $F_1F_2 = 2c = 4$.

Bài tập 8: Trong mặt phẳng Oxy cho elip có phương trình $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Đường thẳng $\Delta: x = -4$ cắt elip (E) tại hai điểm M, N . Tính độ dài đoạn thẳng MN ?

Lời giải

Thế $x = -4$ vào phương trình elip (E) ta được: $\frac{16}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{9}{5}$.
 $\Rightarrow M\left(-4; -\frac{9}{5}\right), N\left(-4; \frac{9}{5}\right)$ do đó: $MN = \frac{18}{5}$.

Bài tập 9: Một elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a > b > 0$. Biết (E) đi qua điểm $A(2; \sqrt{2})$ và $B(2\sqrt{2}; 0)$. Tính độ dài trục bé của Elip

Lời giải

(E) đi qua $B(2\sqrt{2}; 0)$ nên ta có $\frac{(2\sqrt{2})^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1$ suy ra $a = 2\sqrt{2}$.

(E) đi qua $A(2; \sqrt{2})$ nên ta có $\frac{(2)^2}{8} + \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1$ suy ra $b = 2$.

Do đó độ dài trục bé $2b = 4$.

Bài tập 10: Cho (E) có hai tiêu điểm $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$ và điểm M thuộc (E) . Biết chu vi tam giác MF_1F_2 bằng 18. Tính tâm sai của (E) .

Lời giải

Ta có $F_1F_2 = 8$ và $c = 4$ nên $C_{\Delta MF_1F_2} = MF_1 + MF_2 + F_1F_2 = 18 \Rightarrow MF_1 + MF_2 = 10 = 2a \Rightarrow a = 5$.

Tâm sai của elip: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cặp điểm nào là các tiêu điểm của elip $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$?

- A.** $F_{1,2} = (0; \pm 1)$ **B.** $F_{1,2} = (\pm 1; 0)$ **C.** $F_{1,2} = (\pm 3; 0)$ **D.** $F_{1,2} = (1; \pm 2)$

Lời giải

Ta có: $a^2 = 5; b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow F_{1,2} = (\pm 1; 0)$.

Câu 2: Cho Elip $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau:

- A.** (E) có tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. **B.** (E) có trục lớn bằng 6.
C. (E) có trục nhỏ bằng 4. **D.** (E) có tiêu cự $\sqrt{5}$.

$$(E): 4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{suy ra: } a=3, b=2, c=\sqrt{5}$$

Tiêu cự của (E) là $2c = 2\sqrt{5}$.

Câu 3: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của elip

A. $4x^2 + 8y^2 = 32$ **B.** $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$ **C.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = -1$ **D.** $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

Lời giải

$$\text{Vì } 4x^2 + 8y^2 = 32 \Leftrightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Câu 4: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của elip

A. $x^2 - y^2 = 2$ **B.** $x^2 + y^2 = 2$ **C.** $x^2 + 2y^2 = 2$ **D.** $x^2 = 2y^2$

Lời giải

$$\text{Vì } x^2 + 2y^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Câu 5: Trong mặt phẳng (Oxy) , cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$. Tìm tiêu cự của (E) .

A. $F_1F_2=12$ **B.** $F_1F_2=8$ **C.** $F_1F_2=2\sqrt{5}$ **D.** $F_1F_2=4\sqrt{5}$

Lời giải

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 20 \Rightarrow c = 2\sqrt{5} \Rightarrow F_1F_2 = 4\sqrt{5}$$

Câu 6: Trong mặt phẳng Oxy , tìm tiêu cự của elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

A. 3 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3 \quad \text{nên tiêu cự } 2c = 6.$$

Câu 7: Tìm các tiêu điểm của Elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$

A. $F_1(3;0); F_2(0;-3)$ **B.** $F_1(\sqrt{8};0); F_2(0;-\sqrt{8})$
C. $F_1(-3;0); F_2(0;-3)$ **D.** $F_1(-\sqrt{8};0); F_2(\sqrt{8};0)$

Lời giải

$$(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1 \quad \text{có } a=3; b=1 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{8}$$

Vậy (E) có các tiêu điểm là: $F_1(-\sqrt{8}; 0); F_2(\sqrt{8}; 0)$.

- Câu 8:** Elíp $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có độ dài trục lớn bằng:
A. 25. **B.** 50. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Từ phương trình $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 5$.

Do đó (E) có độ dài trục lớn là $2a = 10$.

- Câu 9:** Cho elíp $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$. Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn bằng
A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Ta có: $a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$; $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$.

Vậy tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn bằng $\frac{2c}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

- Câu 10:** Phương trình chính tắc của (E) có độ dài trục lớn gấp 2 lần độ dài trục nhỏ và đi qua điểm $A(2; -2)$ là
A. $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{16} = 1$. **B.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$. **C.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. **D.** $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Lời giải

Gọi phương trình elíp là $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} a^2 = 4b^2 \\ \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4b^2 \\ \frac{4}{4b^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 20 \\ b^2 = 5 \end{cases}$.

Vậy phương trình elíp là $(E): \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$.

- Câu 11:** Phương trình chính tắc của (E) nhận điểm $M(4; 3)$ là một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là
A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. **B.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. **C.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{3} = 1$. **D.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Lời giải

Gọi phương trình elip là $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Vì $M(4;3)$ là một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở nên $a = 4, b = 3$.

Vậy phương trình elip là $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 12: Phương trình chính tắc của (E) có khoảng cách giữa các đường chuẩn bằng $\frac{50}{3}$ và tiêu cự bằng 6 là

- A. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$ B. $\frac{x^2}{89} + \frac{y^2}{64} = 1$ C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

Lời giải

Gọi phương trình elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Theo bài ra ta có $\begin{cases} \frac{a^2}{c} = \frac{25}{3} \\ 2c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 16$.

Vậy phương trình elip là $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Câu 13: Trong mặt phẳng Oxy , cho đường elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 . M là điểm thuộc (E) . Tính $MF_1 + MF_2$.

A. 5 B. 6 C. 3 D. 2

Lời giải

Phương trình của (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a^2 = b^2 + c^2$). Suy ra $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$.

Do M thuộc (E) nên $MF_1 + MF_2 = 2a = 6$.

Câu 14: Trong mặt phẳng Oxy cho elip $(E): x^2 + 3y^2 = 6$. Giá trị nào sau đây là tiêu cự của elip?

A. 2 B. 3 C. 6 D. 4

Lời giải

Ta có $(E): \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$, đó đó $a = \sqrt{6}, b = \sqrt{2}, c = 2$. Độ dài tiêu cự là $2c = 4$.

Câu 15: Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. (E) có các tiêu điểm $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$. B. (E) có tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.
 C. (E) có đỉnh $A_1(-5;0)$. D. (E) có độ dài trục nhỏ bằng 3.

Lời giải

Phương trình elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ nên ta có: $a = 5; b = 3 \Rightarrow c = 4$.

Câu 16: Trong mặt phẳng Oxy cho (E) có phương trình: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ khẳng định nào sau đây đúng?

A. (E) có tâm sai $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

B.

C. $F_1(0; -\sqrt{5}), F_2(0; \sqrt{5})$ là các tiêu điểm của (E) .

D. Độ dài trục lớn là 9.

E. Các đỉnh nằm trên trục lớn là $A_1(0; 3)$ và $A_2(0; -3)$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$ mà $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

Câu 17: Cho Elip có phương trình $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Một tiêu điểm của Elip có tọa độ là:

A. $A(\sqrt{3}; 0)$.

B. $B(0; \sqrt{3})$.

C. $C(\sqrt{5}; 0)$.

D. $D(0; \sqrt{5})$.

Lời giải

Ta có: $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$ nên tiêu điểm của Elip có tọa độ là: $F_1(-\sqrt{3}; 0), F_2(\sqrt{3}; 0)$.

Câu 18: Diện tích của tứ giác tạo nên bởi các đỉnh của elip $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ là

A. 8.

B. 4.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Tọa độ các đỉnh của elip $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ là $A_1(-2; 0), A_2(2; 0), B_1(0; -1), B_2(0; 1)$.

Vì tứ giác $A_1B_1A_2B_2$ là hình thoi có hai đường chéo $A_1A_2 = 4$ và $B_1B_2 = 2$.

Vậy diện tích tứ giác cần tìm là $S = \frac{1}{2} \cdot A_1A_2 \cdot B_1B_2 = 4$.

Câu 19: Trong hệ tọa độ (Oxy) , cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Bán kính qua tiêu của (E) đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. 0

B. 1

C. $\frac{3}{5}$

D. 2

Lời giải

Từ phương trình elip ta có $\begin{cases} a=5 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$. Bán kính qua tiêu là $MF_1 = a + \frac{c}{a}x$ với $-a \leq x \leq a$. Suy ra $a - c \leq MF_1 = a + c$ hay $(MF_1)_{\min} = a - c = 5 - 3 = 2$.

Câu 20: Trong mặt phẳng Oxy , cho elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Điểm nào dưới đây là một tiêu điểm của elip?

A. $F_1(16;0)$ B. $F_1(-4;0)$ C. $F_1(0;-4)$ D. $F_1(5;0)$

Lời giải

Phương trình elip (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$).

Theo bài ra ta có $a^2 = 25$, $b^2 = 9 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$.

Vậy elip có hai tiêu điểm là $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ hay $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$.

Câu 21: Trong mặt phẳng Oxy , cho elip có phương trình $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1$. Độ dài trục nhỏ của đường elip bằng

A. 7.

B. 4.

C. 5.

D. 8.

Lời giải

Ta có $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \Rightarrow a=7, b=4$.

Vậy độ dài trục nhỏ của đường elip là: $2b = 2.4 = 8$.

Câu 22: Trong mặt phẳng Oxy , cho elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$. Tiêu cự của elip bằng

A. 2.

B. 10.

C. $2\sqrt{21}$.

D. 4.

Lời giải

Phương trình elip (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$).

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 21 \end{cases}$ mà $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 21} = \sqrt{4} = 2$.

Vậy tiêu cự của elip đã cho là $2c = 4$.

- Câu 23:** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có tâm sai bằng bao nhiêu?
- A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Phương trình chính tắc của elip có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \\ c = 4 \end{cases} \text{ nên tâm sai của elip } e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}.$$

- Câu 24:** Trong hệ trục toạ độ Oxy , elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ có tiêu cự bằng
- A. 3. B. 6. C. $\frac{9}{16}$. D. $\frac{6}{7}$.

Lời giải

Phương trình chính tắc của elip có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 7 \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = \sqrt{7} \\ c = 3 \end{cases}.$$

Vậy tiêu cự của elip $F_1F_2 = 2c = 2.3 = 6$.

- Câu 25:** Trong hệ trục toạ độ Oxy , cho elip (E) có phương trình $9x^2 + 25y^2 = 225$. Lúc đó hình chữ nhật cơ sở của elip (E) có diện tích bằng
- A. 15. B. 40. C. 60. D. 30.

Lời giải

Ta có: $9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Từ đây, ta được $a = 5, b = 3$. Diện tích hình chữ nhật cơ sở là $S = 2a.2b = 60$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 1:** Cho elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
- a) Elip có tiêu cự bằng 8.
- b) Elip có tiêu điểm $F_1(-4; 0)$.

- c) Điểm $A(5;3)$ thuộc đường elip.
 d) $MF_1 + MF_2 = 12$, với M là một điểm thuộc đường elip.

Lời giải

Ta có: $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5; b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$$

- a) Đúng: Elip có tiêu cự bằng $2c = 2.4 = 8$.
 b) Đúng: Elip có hai tiêu điểm là $F_1(-4;0), F_2(4;0)$.
 c) Sai: Thế tọa độ $A(5;3)$ vào phương trình của elip ta được $\frac{5^2}{25} + \frac{3^2}{9} = 2$ nên điểm $A(5;3)$ không thuộc đường elip.
 d) Sai: $MF_1 + MF_2 = 2a = 2.5 = 10$.

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ, cho đường conic có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Đường conic đã cho là một elip có tiêu điểm nằm trên trục hoành.
 b) Đường conic đã cho có tiêu cự bằng $4\sqrt{14}$.
 c) Đường conic đã cho có tiêu điểm $F_1(0; -2\sqrt{14})$.
 d) Tổng các khoảng cách từ một điểm thuộc đường conic đến hai tiêu điểm bằng 18.

Lời giải

a) Đúng: Phương trình elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$

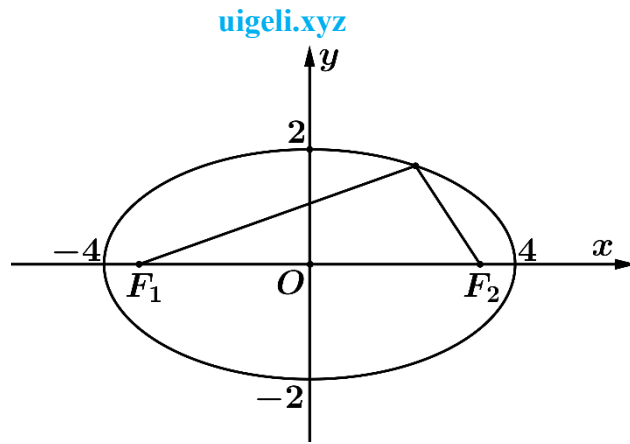
b) Đúng: $c^2 = a^2 - b^2 = 81 - 25 = 56 \Rightarrow c = 2\sqrt{14}$.

Vậy tiêu cự của đường conic đã cho bằng $4\sqrt{14}$

c) Sai: Đường conic đã cho có tiêu điểm thuộc trục Ox

d) Đúng: Tổng các khoảng cách từ một điểm thuộc đường conic đến hai tiêu điểm bằng $2a = 18$

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ, cho elip như hình vẽ.



$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

- a) Phương trình elip của hình trên có dạng $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.
- b) Elip đã cho có tiêu cự là 12.
- c) Một tiêu điểm của elip đã cho là $F_1(-2\sqrt{3}; 0)$.
- d) Tổng các khoảng cách từ một điểm thuộc đường conic đến hai tiêu điểm bằng 4.

Lời giải

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

- a) Đúng: Phương trình elip của hình trên có dạng $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$
- b) Sai: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ nên Elip đã cho có tiêu cự là $2c = 4\sqrt{3}$
- c) Đúng: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ nên tiêu điểm của elip đã cho là $F_1(-2\sqrt{3}; 0)$.
- d) Sai: Tổng các khoảng cách từ một điểm thuộc đường conic đến hai tiêu điểm bằng $2a = 8$

Câu 4: Trong mặt phẳng toạ độ, cho elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{100} = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Phương trình chính tắc elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) thì $a = 144; b = 100$.
- b) Elip đã cho có tiêu cự là $4\sqrt{11}$.
- c) Tiêu điểm của elip đã cho là $F_1(0; -2\sqrt{11})$.
- d) Tổng các khoảng cách từ một điểm thuộc đường conic đến hai tiêu điểm bằng 144.

Lời giải

- a) Sai: Từ phương trình chính tắc elip ta có $a = \sqrt{144} = 12; b = \sqrt{100} = 10$
- b) Đúng: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$ nên elip đã cho có tiêu cự là $2c = 4\sqrt{11}$
- c) Sai: Elip đã cho đã cho có tiêu điểm thuộc trục Ox

d) Sai: Tổng các khoảng cách từ một điểm thuộc đường conic đến hai tiêu điểm bằng $2a = 24$

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ, cho đường conic có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{25} = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường conic đã cho là 1 elip có tiêu cự bằng 22.

b) Đường conic đã cho là một elip có tiêu điểm nằm trên trục tung.

c) Đường conic đã cho có một tiêu điểm $F_1(-4\sqrt{6}; 0)$.

d) Tổng các khoảng cách từ một điểm thuộc đường conic đến hai tiêu điểm bằng 22.

Lời giải

a) Sai: Đường conic có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{25} = 1$ là một elip

Elip này có $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ nên elip đã cho có tiêu cự là $2c = 8\sqrt{6}$

b) Sai: Đường conic đã cho là một elip có tiêu điểm thuộc trục Ox

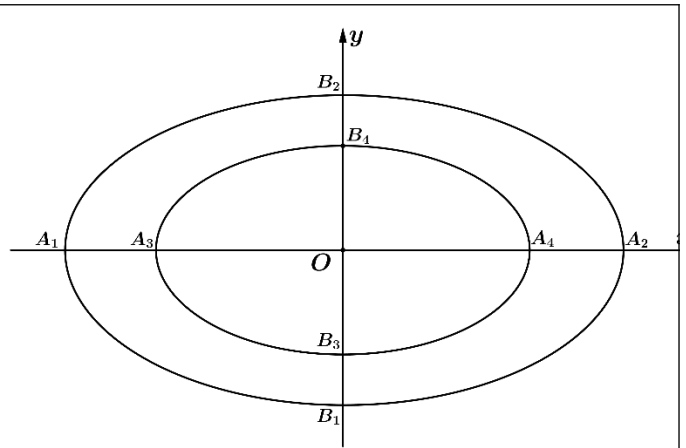
c) Đúng: Phương trình elip trên có $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ nên elip có một tiêu điểm $F_1(-4\sqrt{6}; 0)$

d) Đúng: Tổng các khoảng cách từ một điểm thuộc đường conic đến hai tiêu điểm bằng $2a = 22$

Câu 6: Câu lạc bộ bóng đá AS ROMA dự định xây dựng SVĐ mới có tên là Stadio Della Roma để làm sân nhà của đội bóng thay thế cho sân bóng Olimpico. Hệ thống mái của SVĐ Stadio Della Roma dự định được xây dựng có dạng hai hình elip như hình 1 và được biểu diễn trên hệ trục tọa độ như hình 2 với hình elip lớn bên ngoài có độ dài đoạn $A_1A_2 = 146$ mét, đoạn $B_1B_2 = 108$ mét, hình elip nhỏ bên trong có độ dài đoạn $A_3A_4 = 110$ mét và $B_3B_4 = 72$ mét. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



Hình 1



Hình 2

a) Đường elip lớn trong hình 2 có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{5329} + \frac{y^2}{2916} = 1$.

- b) Phương trình $1296x^2 + 3025y^2 = 3920400$ là phương trình của đường elip nhỏ trong hình 1.
- c) Đường elip lớn trong hình 2 đã cho có một tiêu điểm $F_1(-\sqrt{2413}; 0)$.
- d) Đường elip trong nhỏ hình 2 có tiêu cự 1729.

Lời giải

- a) Đúng: Đường elip trong hình 1 có $a = \frac{146}{2} = 73; b = \frac{108}{2} = 54$

Khi đó elip có phương trình $\frac{x^2}{5329} + \frac{y^2}{2916} = 1$

- b) Đúng: Đường elip trong hình 2 có $a = \frac{110}{2} = 55; b = \frac{72}{2} = 36$

Khi đó elip có phương trình $1296x^2 + 3025y^2 = 3920400 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3025} + \frac{y^2}{1296} = 1$

- c) Đúng: Đường elip lớn trong hình 1 có $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2413}$ nên có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{2413}; 0)$

- d) Sai: Đường elip trong hình 1 có $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1729}$ nên có tiêu cự là $2c = 2\sqrt{1729}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

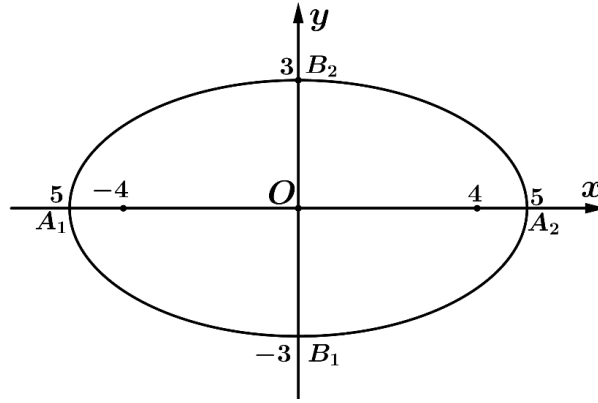
- Câu 1:** Cho (E) có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{7}; 0)$, $F_2(\sqrt{7}; 0)$ và điểm $M(-\sqrt{7}; \frac{9}{4})$ thuộc (E) . Gọi N là điểm đối xứng với M qua gốc tọa độ O . Tính $NF_1 + MF_2$

Lời giải

Điểm N đối xứng với M qua gốc tọa độ O nên $N(\sqrt{7}; -\frac{9}{4})$.

Ta có: $MF_1 = \frac{9}{4}; MF_2 = \frac{23}{4}; NF_1 = \frac{23}{4}; NF_2 = \frac{9}{4}$ nên do đó $NF_2 + MF_1 = \frac{9}{2}$.

- Câu 2:** Trước một tòa nhà, người ta làm một cái hồ bơi có dạng hình elip với độ dài các trục là $A_1A_2 = 10$; $B_1B_2 = 6$. Xét hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên các trục là mét) như hình vẽ;



Xét các điểm M, N cùng thuộc đoạn A_1A_2 của elip và đều cách O một khoảng bằng 4 m về hai phía của O . Tổng khoảng cách từ mọi điểm trên đường elip đến M và N luôn bằng 10 m.

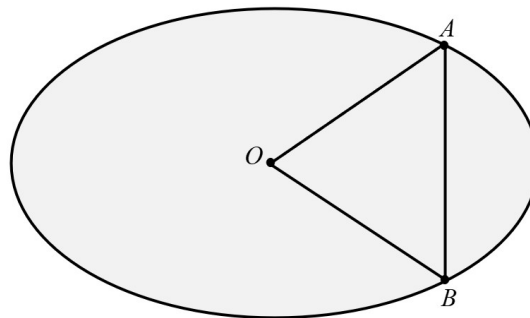
Lời giải

Ta có: $a = 5, b = 3 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow c = 4$ nên do đó $M(-4; 0), N(4; 0)$ là hai tiêu điểm của (E) .

Gọi A là điểm bất kì trên (E) ta có $MA + NA = 2a = 10$.

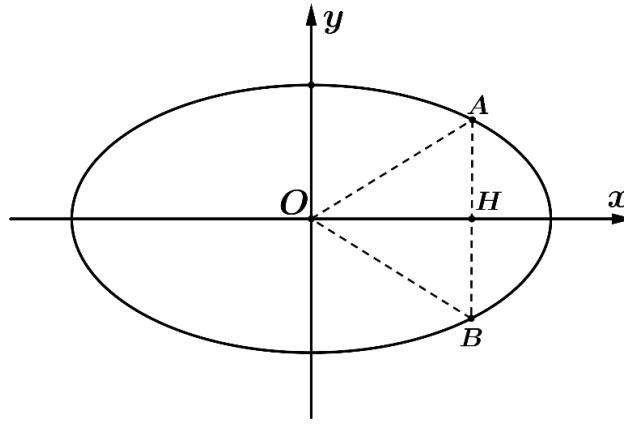
Câu 3: Gia chủ có một miếng đất có hình Elip với độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{6}$ m, độ dài trục nhỏ bằng 2 m. Gia chủ muốn trồng hoa thành hình tam giác cân OAB (tham khảo hình vẽ) với điểm O là tâm của Elip và các điểm A và B thuộc đường Elip nói trên. Diện tích trồng hoa lớn nhất bằng bao nhiêu?



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như (Oxy) như hình vẽ.

Khi đó phương trình đường Elip là $(E): \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{1} = 1$.



Không mất tổng quát, ta chọn điểm A và B thuộc (E) sao cho điểm A và B có hoành độ dương. Do tam giác OAB cân tại O suy ra A đối xứng với B qua Ox .

Gọi điểm $A(x_0; y_0) \Rightarrow B(x_0; -y_0), (x_0 > 0)$

Điểm $A \in (E): \frac{x_0^2}{6} + \frac{y_0^2}{1} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow |y_0| = \frac{\sqrt{6-x_0^2}}{2}$ nên ta có $AB = 2|y_0| = \sqrt{6-x_0^2}$

Gọi H là trung điểm AB thì $H(x_0; 0) \Rightarrow OH = x_0$

Khi đó: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot x_0 \cdot \sqrt{6-x_0^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x_0^2(6-x_0^2)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x_0^2 + 6 - x_0^2}{2} = \frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $x_0^2 = 6 - x_0^2 \Rightarrow x_0 = \sqrt{3} \Rightarrow y_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy diện tích trồng hoa lớn nhất bằng $\frac{3}{2} = 1,5 \text{ m}^2$.

Câu 4: Ông Hoàng có một mảnh vườn hình elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 60 m và 30 m. Ông chia thành hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với elip để làm mục đích sử dụng khác nhau. Nửa bên trong đường tròn ông trồng cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu. Tính tỉ số diện tích T giữa phần trồng cây lâu năm so với diện tích trồng hoa màu. Biết diện tích elip được tính theo công thức $S = \pi ab$ trong đó a, b lần lượt là độ dài nửa trục lớn và nửa trục bé của elip. Biết độ rộng của đường elip không đáng kể.

Lời giải

Diện tích hình tròn: $S_T = \pi \cdot 15^2$, diện tích elip là $S_E = \pi \cdot 15 \cdot 30$.

Tỉ số diện tích $T = \frac{S_T}{S_E - S_T} = \frac{\pi \cdot 15^2}{\pi \cdot 15 \cdot 30 - \pi \cdot 15^2} = \frac{15}{30 - 15} = 1$.

Câu 5: Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một đường elip với tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ của quỹ đạo lần lượt là 768800 km và 767640 km. Tìm khoảng cách lớn nhất và bé nhất từ tâm của Trái Đất đến Mặt Trăng.

Vì $2a = 768800$ và $2b = 767640$ nên ta có $a = 384400$ và $b = 383820$.

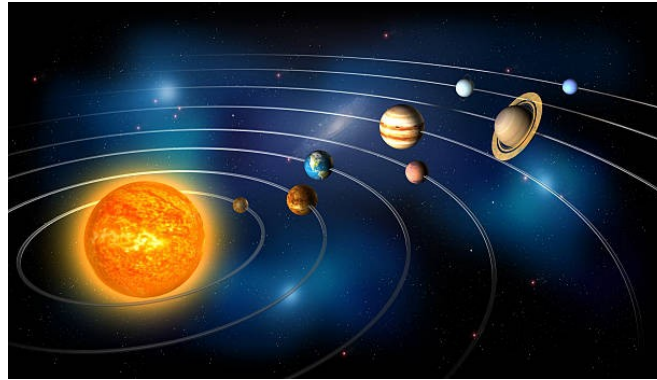
Từ đó suy ra $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{384400^2 - 383820^2} \approx 21108$.

Khoảng cách lớn nhất từ tâm của Trái Đất đến Mặt Trăng là:

$$a + c \approx 384400 + 21108 = 405508 \text{ (km)}$$

Khoảng cách nhỏ nhất là $a - c \approx 384400 - 21108 = 363292 \text{ (km)}$

Câu 6: Các hành tinh và các sao chổi khi chuyển động xung quanh mặt trời có quỹ đạo là một đường elip trong đó tâm mặt trời là một tiêu điểm. Điểm gần mặt trời nhất gọi là điểm cận nhật, điểm xa mặt trời nhất gọi là điểm viễn nhật. Trái đất chuyển động xung quanh mặt trời theo quỹ đạo là một đường elip có độ dài nửa trục lớn bằng $93.000.000$ dặm. Tỉ số khoảng cách giữa điểm cận nhật và điểm viễn nhật đến mặt trời là $\frac{59}{61}$. Tính khoảng cách từ trái đất đến mặt trời khi trái đất ở điểm cận nhật.



Lời giải

Ta có $a = 93.000.000$

$$\text{Và } \frac{a - c}{a + c} = \frac{59}{61} \Leftrightarrow 61a - 61c = 59a + 59c \Leftrightarrow c = \frac{a}{60} = \frac{93.000.000}{60} = 1.550.000$$

Suy ra khoảng cách từ trái đất đến mặt trời khi trái đất ở điểm cận nhật là: $91.450.000$.

Dạng 2: Phương trình đường Elip

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{với } b^2 = a^2 - c^2$$

Phương pháp: Cho Elip có phương trình chính tắc:

■ Tiêu điểm $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$

■ Tọa độ các đỉnh $A_1(-a; 0), A_2(a; 0), B_1(0; -b), B_2(0; b)$

■ Độ dài trục lớn $2a$

- Độ dài trục bé $2b$.
- Tiêu cự $2c$

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

- Elip đi qua điểm $M\left(2; \frac{5}{3}\right)$ và có một tiêu điểm $F_1(-2; 0)$.
- Elip nhận $F_2(5; 0)$ là một tiêu điểm và có độ dài trục nhỏ bằng $4\sqrt{6}$.
- Elip có độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ và tiêu cự bằng 2.
- Elip đi qua hai điểm $M(2; -\sqrt{2})$ và $N(-\sqrt{6}; 1)$.

Lời giải

- Do (E) có một tiêu điểm $F_1(-2; 0)$ nên $c = 2$ suy ra $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 4$.

Mặt khác, (E) đi qua điểm $M\left(2; \frac{5}{3}\right)$ nên $\frac{2^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{b^2 + 4} + \frac{25}{9b^2} = 1$

$$\Leftrightarrow 9b^4 - 25b^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 5 \text{ hoặc } b^2 = -\frac{20}{9}.$$

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

- Do (E) có một tiêu điểm $F_2(5; 0)$ nên $c = 5$.

Theo giả thiết độ dài trục nhỏ bằng $4\sqrt{6}$ nên $2b = 4\sqrt{6} \Leftrightarrow b = 2\sqrt{6}$.

Suy ra $a^2 = b^2 + c^2 = 5^2 + (2\sqrt{6})^2 = 49$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$.

- Độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ nên $2a = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow a = \sqrt{5}$ và tiêu cự bằng 2 nên $2c = 2 \Leftrightarrow c = 1$.

Từ hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$, suy ra $b^2 = a^2 - c^2 = 5 - 1 = 4$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

d) Do (E) đi qua $M(2; -\sqrt{2})$ và $N(-\sqrt{6}; 1)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1 \\ \frac{6}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 8 \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

nên Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Bài tập 2: Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip có tổng độ dài hai trục bằng 8 và tâm sai $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Elip có tâm sai $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20.

c) Elip có tiêu điểm $F_1(-2; 0)$ và hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng $12\sqrt{5}$.

Lời giải

a) Tổng độ dài hai trục bằng 8 nên $2a + 2b = 8$. (1)

Tâm sai $e = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \sqrt{2}c$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $\begin{cases} 2a + 2b = 8 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ a = \sqrt{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}c + b = 4 \\ a = \sqrt{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - \sqrt{2}c \\ a = \sqrt{2}c \end{cases}$.

Thay vào hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$, ta được

$$2c^2 = (4 - \sqrt{2}c)^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 - 8\sqrt{2}c + 16 = 0 \Leftrightarrow c = 4\sqrt{2} \pm 4$$

Với $c = 4\sqrt{2} + 4$, suy ra $\begin{cases} a = 8 + 4\sqrt{2} \\ b = -4 - 4\sqrt{2} \end{cases}$: không thỏa mãn.

Với $c = 4\sqrt{2} - 4$, suy ra $\begin{cases} a = 8 - 4\sqrt{2} \\ b = -4 + 4\sqrt{2} \end{cases}$.

Do đó Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{(8 - 4\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(4\sqrt{2} - 4)^2} = 1$.

b) Elip có tâm sai $e = \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow a = \frac{3}{\sqrt{5}}c$ (1). Mặt khác, Elip có hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20 nên $2(2a + 2b) = 20 \Leftrightarrow a + b = 5 \Leftrightarrow b = 5 - a$ (2).

Thay (1) và (2) vào hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$, ta được:

$$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}c\right)^2 = (5-a)^2 + c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{5}}c\right)^2 = \left(5 - \frac{3}{\sqrt{5}}c\right)^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}c + 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5\sqrt{5} \\ c = \sqrt{5} \end{cases}$$

Với $c = 5\sqrt{5}$, suy ra $\begin{cases} a = 15 \\ b = -10 \end{cases}$: không thỏa mãn.

Với $c = \sqrt{5}$, suy ra $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$. Do đó Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

c) Elip có một tiêu điểm $F_1(-2;0)$ nên $c = 2$.

Diện tích hình chữ nhật cơ sở $S = 2a \cdot 2b = 12\sqrt{5} \Leftrightarrow ab = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow a^2b^2 = 45$. (1)

Mặt khác, ta có $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 4$. (2)

Kết hợp (1) và (2), ta được

$$a^2b^2 = 45 \Leftrightarrow (b^2 + 4)b^2 = 45 \Leftrightarrow b^4 + 4b^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 5 \text{ hoặc } b^2 = -9.$$

Với $b^2 = 5$, suy ra $a^2 = 9$. Do đó Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Bài tập 3: Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip đi qua điểm $M(-\sqrt{5}; 2)$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 10.

b) Elip có tâm sai $e = \frac{3}{5}$ và khoảng cách từ tâm đối xứng của nó đến một đường chuẩn bằng $\frac{25}{3}$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng 10 và phương trình một đường chuẩn là $x = \frac{25}{4}$.

d) Khoảng cách giữa các đường chuẩn bằng 36 và bán kính qua tiêu điểm của điểm M thuộc Elip là 9 và 15.

Lời giải

a) Elip đi qua điểm $M(-\sqrt{5}; 2)$ nên $\frac{5}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$. (1)

Khoảng cách giữa hai đường chuẩn của Elip bằng 10 nên

$$2 \cdot \frac{a}{e} = 10 \Leftrightarrow \frac{a}{e} = 5 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} = 5 \Leftrightarrow a^2 = 5c \text{ (2)}$$

Từ (2), kết hợp với hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$, ta được $b^2 = a^2 - c^2 = 5c - c^2$ (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta được: $\frac{5}{5c} + \frac{4}{5c - c^2} = 1 \Leftrightarrow c^2 - 6c + 9 = 0 \Leftrightarrow c = 3$.

Với $c = 3$, suy ra $\begin{cases} a^2 = 15 \\ b^2 = 6 \end{cases}$. Do đó Elip cần tìm có phương trình (E): $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$.

b) Ta có $e = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow c = \frac{3}{5}a$.

Elip có khoảng cách từ tâm đối xứng O đến một đường chuẩn một khoảng bằng $\frac{25}{3}$ nên

$$\frac{a}{e} = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \frac{a^2}{\frac{3}{5}a} = \frac{25}{3} \Leftrightarrow a = 5$$

Với $a = 5$, suy ra $c = 3$ và $b^2 = a^2 - c^2 = 16$.

Do đó Elip cần tìm có phương trình (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng 10 nên $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$.

Mặt khác, Elip có phương trình một đường chuẩn

$$x = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{e} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \frac{5^2}{c} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow c = 4$$

Suy ra $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$. Do đó Elip cần tìm có phương trình (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

d) Elip có khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 36 nên $2 \cdot \frac{a}{e} = 36 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{a^2}{c} = 36 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} = 18$.

Mặt khác, ta có $\begin{cases} MF_1 = a + ex = 9 \\ MF_2 = a - ex = 15 \end{cases}$ suy ra $2a = 24 \Leftrightarrow a = 12$.

Với $a = 12$, suy ra $c = 8$ và $b^2 = a^2 - c^2 = 144 - 64 = 80$.

Do đó Elip cần tìm có phương trình (E): $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{80} = 1$.

Bài tập 4 : Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip có hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 41$ và đi qua điểm $A(0; 5)$.

b) Elip có hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 21$ và điểm $M(1;2)$ nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc 60° .

c) Một cạnh hình chữ nhật cơ sở của Elip nằm trên $d: x - \sqrt{5} = 0$ và độ dài đường chéo hình chữ nhật bằng 6.

d) Tứ giác $ABCD$ là hình thoi có bốn đỉnh trùng với các đỉnh của Elip. Bán kính của đường tròn nội tiếp hình thoi bằng $\sqrt{2}$ và tâm sai của Elip bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Elip đi qua $A(0;5) \in Oy$, suy ra $b = 5$.

Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x = \pm a; y = \pm 5$.

Suy ra một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là $(a;5)$. Theo giả thiết $(a;5)$ thuộc đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow a^2 + 25 = 41 \Leftrightarrow a^2 = 16.$$

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

b) Theo giả thiết bài toán, ta có $\angle F_1MF_2 = 60^\circ$ suy ra

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1 \cdot MF_2 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = (1+c)^2 + 4 + (1-c)^2 + 4 - 2\sqrt{(1+c)^2 + 4} \cdot \sqrt{(1-c)^2 + 4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = 2c^2 + 10 - \sqrt{(1+c)^2 + 4} \cdot \sqrt{(1-c)^2 + 4} \Leftrightarrow \sqrt{(1+c)^2 + 4} \cdot \sqrt{(1-c)^2 + 4} = 10 - 2c^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 2c^2 \geq 0 \\ \left[\left[(1+c)^2 + 4 \right] \cdot \left[(1-c)^2 + 4 \right] = (10 - 2c^2)^2 \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < c \leq \sqrt{5} \\ 3c^4 - 46c^2 + 75 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c^2 = \frac{23 \pm 4\sqrt{19}}{3}.$$

Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x = \pm a; y = \pm b$.

Suy ra một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là $(a;b)$. Theo giả thiết $(a;b)$ thuộc đường tròn (C) nên $a^2 + b^2 = 21$.

Lại có $a^2 = b^2 + c^2$, suy ra $a^2 - b^2 = c^2$.

$$\text{Với } c^2 = \frac{23 + 4\sqrt{19}}{3}, \text{ ta có } \begin{cases} a^2 + b^2 = 21 \\ a^2 - b^2 = \frac{23 + 4\sqrt{19}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{43 + 2\sqrt{19}}{3} \\ b^2 = \frac{20 - 2\sqrt{19}}{3} \end{cases}.$$

$$(E): \frac{x^2}{\frac{43+2\sqrt{19}}{3}} + \frac{y^2}{\frac{20-2\sqrt{19}}{3}} = 1$$

Suy ra

$$\text{Với } c^2 = \frac{23-4\sqrt{19}}{3}, \text{ ta có } \begin{cases} a^2 + b^2 = 21 \\ a^2 - b^2 = \frac{23-4\sqrt{19}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{43-2\sqrt{19}}{3} \\ b^2 = \frac{20+2\sqrt{19}}{3} \end{cases}$$

$$(E): \frac{x^2}{\frac{43-2\sqrt{19}}{3}} + \frac{y^2}{\frac{20+2\sqrt{19}}{3}} = 1$$

Suy ra

Vậy có hai Elip cần tìm thỏa yêu cầu bài toán:

$$(E): \frac{x^2}{\frac{43+2\sqrt{19}}{3}} + \frac{y^2}{\frac{20-2\sqrt{19}}{3}} = 1 \quad (E): \frac{x^2}{\frac{43-2\sqrt{19}}{3}} + \frac{y^2}{\frac{20+2\sqrt{19}}{3}} = 1$$

hoặc

c) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x = \pm a; y = \pm b$.

Theo giả thiết, một cạnh hình chữ nhật cơ sở là $d: x - \sqrt{5} = 0$, suy ra $a = \sqrt{5}$.

Độ dài đường chéo hình chữ nhật cơ sở bằng 6 nên

$$\sqrt{4a^2 + 4b^2} = 6 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 = 36 \Leftrightarrow 20 + 4b^2 = 36 \Leftrightarrow b^2 = 4.$$

$$\text{Vậy Elip cần tìm có phương trình } (E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$\text{d) Elip có tâm sai } e = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 2c.$$

Elip có các đỉnh $A_1(-a; 0), A_2(a; 0), B_1(0; -b), B_2(0; b)$. Gọi H là hình chiếu của O lên A_2B_2 .

Theo giả thiết suy ra bán kính của đường tròn đã cho bằng OH . Ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4c^2} + \frac{1}{a^2 - c^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4c^2} + \frac{1}{3c^2} \Leftrightarrow c^2 = \frac{7}{6}.$$

$$\text{Suy ra } a^2 = 4c^2 = \frac{14}{3} \text{ và } b^2 = a^2 - c^2 = \frac{7}{2}. \text{ Vậy Elip cần tìm có phương trình } (E): \frac{x^2}{\frac{14}{3}} + \frac{y^2}{\frac{7}{2}} = 1.$$

Bài tập 5: Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Tứ giác $ABCD$ là hình thoi có bốn đỉnh trùng với các đỉnh của Elip. Đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $(C): x^2 + y^2 = 4$ và $AC = 2BD$, A thuộc Ox .

b) Elip có độ dài trục lớn bằng 8 và giao điểm của Elip với đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$ tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

c) Elip có tâm sai $e = \frac{1}{3}$ và giao điểm của Elip với đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 9$ tại bốn điểm A, B, C, D sao cho AB song song với Ox và $AB = 3BC$.

d) Elip có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của Elip cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải

a) Giả sử một đỉnh của hình thoi là $A(a; 0)$. Suy ra $AC = 2a$ và $BD = 2b$.

Theo giả thiết: $AC = 2BD \Leftrightarrow 2a = 2.2b \Leftrightarrow a = 2b$.

Đường tròn (C) có $R = 2$. Gọi H là hình chiếu của O lên AB với $B(0; b)$. Khi đó ta có

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{R^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow b^2 = 5$$

Suy ra $a^2 = 20$. Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$.

b) Elip có độ dài trục lớn bằng 8 nên $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$.

Do (E) và (C) đều có tâm đối xứng là O và hai trục đối xứng là Ox và Oy nên hình vuông tạo bởi giữa chúng cũng có tính chất tương tự. Do đó ta giả sử gọi một đỉnh của hình vuông là $M(x; x)$ với $x > 0$. Vì $M \in (C) \Leftrightarrow x^2 + x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4$ suy ra $x = 2 \Rightarrow M(2; 2)$.

Ta có $M \in (E) \Leftrightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{16} + \frac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{3}$.

$$(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$$

Vậy Elip cần tìm có phương trình

c) Elip có tâm sai $e = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 3c$.

Đặt $BC = x$ với $x > 0$, suy ra $AB = 3x$. Giả sử một đỉnh $A\left(\frac{3}{2}x; \frac{1}{2}x\right)$. Ta có

$$A \in (C) \Leftrightarrow \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{18}{5} \quad x = \frac{3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow A\left(\frac{9\sqrt{10}}{10}; \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

Mặt khác:

$$A \in (E) \Leftrightarrow \frac{81}{10a^2} + \frac{9}{10b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{81}{10(3c)^2} + \frac{9}{10(a^2 - c^2)} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{10c^2} + \frac{9}{80c^2} = 1 \Leftrightarrow c^2 = \frac{81}{80}$$

Suy ra $a^2 = 9c^2 = \frac{729}{80}$ và $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{81}{10}$.

$$(E): \frac{x^2}{\frac{729}{80}} + \frac{y^2}{\frac{81}{10}} = 1$$

Vậy Elip cần tìm có phương trình

d) Độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$ nên $2a = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2}$.

Các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm cùng thuộc đường tròn nên $b = c$.

Từ hệ thức $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 8 = 2b^2 \Leftrightarrow b^2 = 4$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Bài tập 6: Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip có hai đỉnh trên trục nhỏ cùng với hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông có diện tích bằng 32.

b) Elip có một đỉnh và hai tiêu điểm tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của Elip bằng $12(2 + \sqrt{3})$.

c) Elip đi qua điểm $M(2\sqrt{3}; 2)$ và M nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc vuông.

d) Elip đi qua điểm $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc 60° .

Lời giải

a) Hai đỉnh trên trục nhỏ và hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông nên $b = c$.

Mặt khác, diện tích hình vuông bằng 32 nên $2c \cdot 2b = 32 \Leftrightarrow b^2 = 8$.

Suy ra $a^2 = b^2 + c^2 = 16$. Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$.

b) Chu vi hình chữ nhật cơ sở

$$C = 12(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow 2(2a + 2b) = 12(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow a + b = 3(2 + \sqrt{3}) \quad (1)$$

Giả sử tam giác $F_1F_2B_2$ đều cạnh $F_1F_2 = 2c$ mà $B_2O \perp F_1F_2$ suy ra:

$$OB_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} F_1F_2 \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2c = \sqrt{3}c \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $a = 3(2 + \sqrt{3}) - b = 3(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{3}c$.

Thay vào hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$, ta được

$$\left[(6 + 3\sqrt{3}) - \sqrt{3}c \right]^2 = 3c^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 + 6\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})c - (6 + 3\sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow c = 3$$

hoặc $c = -12\sqrt{3} - 21$.
H

Với $c = 3$, suy ra $a = 6$ và $b = 3\sqrt{3}$. Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$.

c) Từ giả thiết, ta suy ra $\angle F_1MF_2 = 90^\circ$ hay $MF_1 \perp MF_2$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0 \Leftrightarrow (-c - 2\sqrt{3})(c - 2\sqrt{3}) + 4 = 0 \Leftrightarrow c^2 = 16$$

Hơn nữa (E) qua M nên

$$\frac{12}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{12}{b^2 + 16} + \frac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow 12b^2 + 4b^2 + 64 = b^4 + 16b^2 \Leftrightarrow b^4 = 64 \Leftrightarrow b^2 = 8$$

Suy ra $a^2 = b^2 + c^2 = 24$. Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{8} = 1$.

d) Từ giả thiết, ta suy ra $\angle B_1F_1B_2 = 60^\circ$ mà $F_1B_1 = F_1B_2$. Suy ra tam giác $F_1B_1B_2$ đều cạnh $B_1B_2 = 2b$ nên

$$F_1O = \frac{\sqrt{3}}{2} B_1B_2 \Leftrightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2} 2b \Leftrightarrow c = \sqrt{3}b \quad (1)$$

Hơn nữa (E) qua $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nên $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4b^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2), kết hợp với hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$, ta được $a^2 = 4$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Bài tập 7: Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Elip có một tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ và đi qua điểm M , biết tam giác F_1MF_2 có diện tích bằng 1 và vuông tại M .

b) Elip đi qua ba đỉnh của tam giác đều ABC . Biết tam giác ABC có trục đối xứng là Oy , $A(0; 2)$ và có diện tích bằng $\frac{49\sqrt{3}}{12}$.

c) Khi M thay đổi trên Elip thì độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 và độ dài lớn nhất của MF_1 bằng 8 với F_1 là tiêu điểm có hoành độ âm của Elip.

Lời giải

a) Elip có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0)$, suy ra $c = \sqrt{3}$. Gọi $M(x; y) \in (E)$. Theo giả thiết, ta có:

$$S_{\Delta F_1 M F_2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} MF_1 \cdot MF_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} (a+ex)(a-ex) = 1 \Leftrightarrow a^2 - e^2 x^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 - \frac{c^2}{a^2} x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - \frac{3}{a^2} x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{(a^2 - 2)a^2}{3} \quad (1)$$

Cũng từ $MF_1 \perp MF_2$, ta có $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0 \Leftrightarrow (-c-x)(c-x) + (-y)(-y) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = c^2 = 3 \quad (2). \text{ Từ (1) và (2), ta có } y^2 = 3 - x^2 = 3 - \frac{(a^2 - 2)a^2}{3} = \frac{9 - a^4 + 2a^2}{3}.$$

$$M(x; y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2 - 2}{3} + \frac{9 - a^4 + 2a^2}{3(a^2 - 3)} = 1$$

Do đó:

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2)(a^2 - 3) + 9 - a^4 + 2a^2 = 3a^2 - 9 \Leftrightarrow a^2 = 4.$$

Suy ra $b^2 = 1$. Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

b) Tam giác ABC đều, có điểm $A(0; 2) \in Oy$ và trục đối xứng là Oy nên hai điểm B, C đối xứng nhau qua Oy .

Giả sử $B(x; y)$ với $x > 0, y < 2$, suy ra $C(-x; y)$. Độ dài cạnh của tam giác là $2x$.

Theo giả thiết, ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{49\sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow \frac{(2x)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{12}$, suy ra $x = \frac{7}{2\sqrt{3}}$.

Đường cao của tam giác đều $h = \frac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2 - y = \frac{7}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$ suy ra $B\left(\frac{7}{2\sqrt{3}}; \frac{3}{2}\right)$.

Đến đây bài toán trở thành viết phương trình Elip đi qua hai điểm $A(0; 2)$ và $B\left(\frac{7}{2\sqrt{3}}; \frac{3}{2}\right)$.

$$(E): \frac{x^2}{\frac{28}{5}} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Vậy Elip cần tìm có phương trình

c) Độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 nên $b = 4$.

Mặt khác, ta lại có độ dài lớn nhất của MF_1 bằng 8 nên $a + c = 8$.

Từ đó ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} a + c = 8 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 8 \\ a^2 = 16 + c^2 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} a = 5 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Bài tập 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Elip (E) đi qua điểm $M(0;3)$. Biết khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm bất kì trên (E) bằng 8. Viết phương trình chính tắc của Elip.

Lời giải

$M(0;3) \in (E) \Rightarrow b = 3$ nên khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm bất kì trên (E) bằng 8 $\Rightarrow a = 4$.

Phương trình chính tắc của $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Bài tập 9: a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho Elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm của Elip; A, B là hai điểm thuộc (E) sao cho $AF_1 + BF_2 = 8$. Tính $AF_2 + BF_1$.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho Elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm của Elip trong đó F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1 = 2MF_2$.

c) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho Elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm của Elip trong đó F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1 - MF_2 = 2$.

Lời giải

a) Ta có $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$. Do $A, B \in (E)$ nên $AF_1 + AF_2 = 2a = 10$ và $BF_1 + BF_2 = 2a = 10$.

Suy ra $AF_1 + AF_2 + BF_1 + BF_2 = 20 \Leftrightarrow 8 + AF_2 + BF_1 = 20 \Leftrightarrow AF_2 + BF_1 = 12$.

b) Ta có $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ và $b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 4 \Rightarrow c = 2$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$. Ta có $MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow a + ex = 2(a - ex) \Leftrightarrow x = \frac{a}{3e} = \frac{a^2}{3c} = \frac{3}{2}$.

Thay vào (E) , ta được $\frac{9}{4.9} + \frac{y^2}{5} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$.

Vậy $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

c) Ta có $a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$ và $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 4 \Rightarrow c = 2$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$. Ta có $MF_1 - MF_2 = 2 \Leftrightarrow a + ex - (a - ex) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} = \frac{a}{c} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Thay vào (E) , ta được $\frac{2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 3 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3}$.

Vậy $M(\sqrt{2}; -\sqrt{3})$ hoặc $M(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

Bài tập 10: a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho Elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm những điểm M thuộc

(E) sao cho nó nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho Elip $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2 .
Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho góc $\widehat{F_1MF_2} = 60^\circ$.

c) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho Elip $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2 .
Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho góc $\widehat{F_1MF_2} = 120^\circ$.

d) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho Elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2 trong đó F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho góc $\widehat{MF_1F_2} = 120^\circ$.

Lời giải

a) Ta có $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ và $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 2 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$. Ta có $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$ nên $F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = (a + ex)^2 + (a - ex)^2 \Leftrightarrow 32 = 2a^2 + 2e^2x^2 \Leftrightarrow 32 = 18 + 2 \cdot \frac{8}{9} \cdot x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{63}{8} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

Thay vào (E) , ta được $y^2 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Vậy $M\left(\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $M\left(\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $M\left(-\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

b) Ta có $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ và $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$. Ta có $F_1 F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1 \cdot MF_2 \cdot \cos 60^\circ$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = (a+ex)^2 + (a-ex)^2 - 2(a+ex)(a-ex) \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow 12 = 2a^2 + 2e^2x^2 - a^2 + e^2x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{12-a^2}{3e^2} = \frac{32}{9} \Leftrightarrow x = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Thay vào (E) , ta được $\frac{32}{9 \cdot 4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{3}$.

Vậy $M\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $M\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, $M\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

c) Ta có $a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$ và $b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 75 \Rightarrow c = 5\sqrt{3}$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$. Ta có $F_1 F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1 \cdot MF_2 \cos 120^\circ$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = (a+ex)^2 + (a-ex)^2 - 2(a+ex)(a-ex)\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 300 = 2a^2 + 2e^2x^2 + a^2 - e^2x^2$$

$$\Leftrightarrow 300 = 3a^2 + e^2x^2 \Leftrightarrow 300 = 300 + e^2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Thay vào (E) , ta được $\frac{0}{100} + \frac{y^2}{25} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm 5$.

Vậy $M(0; 5)$ hoặc $M(0; -5)$.

d) Ta có $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ và $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$. Ta có $MF_2^2 = MF_1^2 + F_1 F_2^2 - 2MF_1 \cdot F_1 F_2 \cos 120^\circ$

$$\Leftrightarrow (a-ex)^2 = (a+ex)^2 + 4c^2 - 2(a+ex)2c\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 4aex + 4c^2 + 2ac + 2ecx = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{65}{14}.$$

Thay vào (E) , ta được $y^2 = \frac{243}{196} \Leftrightarrow y = \pm \frac{9\sqrt{3}}{14}$. Vậy $M\left(-\frac{65}{14}; \frac{9\sqrt{3}}{14}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{65}{14}; -\frac{9\sqrt{3}}{14}\right)$.

Bài tập 11: a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho Elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và điểm $C(2; 0)$. Tìm tọa

độ các điểm A, B thuộc (E) , biết rằng A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho Elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E) có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

c) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho Elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ và điểm $A(3;0)$. Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc (E) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A , biết B có tung độ dương.

Lời giải

a) a có $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ và $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$.

Giả sử $A(x; y)$ suy ra $B(x; -y)$. Theo giả thiết, tam giác ABC đều

$$AC^2 = AB^2 \Leftrightarrow (2-x)^2 + y^2 = 4y^2 \Leftrightarrow (2-x)^2 = 3y^2 \quad (1)$$

Hơn nữa $A \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 4 \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta có

$$\begin{cases} (2-x)^2 = 3y^2 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - \frac{x^2}{4} \\ 7x^2 - 16x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ y = \frac{4\sqrt{3}}{7} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ y = -\frac{4\sqrt{3}}{7} \end{cases}.$$

Vì A, B khác C nên $A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ và $B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

b) Do tam giác OAB cân tại O và A, B đều có hoành độ dương nên A, B đối xứng nhau qua Ox .

Giả sử $A(x; y)$ với $x > 0$, suy ra $B(x; -y)$. Gọi H là hình chiếu của O lên AB . Khi đó ta có

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = \frac{1}{2} |2y| x = x|y|$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy*, ta có $1 = \frac{x^2}{4} + y^2 \geq 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot |y| = x|y|$.

Do đó $S_{\Delta OAB} \leq 1$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{x^2}{4} = y^2$.

Thay vào (E) , ta được $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow y^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$.

Vậy $A\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ và $B\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $A\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ và $B\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

c) Gọi $B(x; y)$ với $x > 0$.

Do tam giác ABC vuông cân tại A , suy ra B và C đối xứng nhau qua Ox nên $C(x; -y)$.

Ta có $AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - y^2 = 0 \quad (1)$

Hơn nữa, $B \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta có

$$\begin{cases} (x-3)^2 - y^2 = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - \frac{x^2}{9} \\ (x-3)^2 - 1 + \frac{x^2}{9} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - \frac{x^2}{9} \\ \frac{10}{9}x^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{12}{5} \\ y = \pm \frac{3}{5} \end{cases}$$

Vì A, B khác C nên $B\left(\frac{12}{5}; \frac{3}{5}\right), C\left(\frac{12}{5}; -\frac{3}{5}\right)$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Phương trình chính tắc của Elip là

A. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$

B. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

C. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$

D. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

Lời giải

Câu 2: Phương trình chính tắc của elip có tiêu cự bằng 6 và trục lớn bằng 10.

A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

B. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1$

C. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Lời giải

Gọi phương trình elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Vì trục lớn bằng 10 nên $2a = 10 \Rightarrow a = 5$.

Elip có tiêu cự bằng 6 nên $2c = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow \sqrt{a^2 - b^2} = 3 \Rightarrow b = 4$.

Vậy phương trình Elip là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Câu 3: Phương trình của Elip (E) có độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng 6 là:

A. $9x^2 + 16y^2 = 144$

B. $9x^2 + 16y^2 = 1$

C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

D. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$

Lời giải

Gọi $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; (a > b)$

Độ dài trục lớn là: $A_1A_2 = 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

Độ dài trục nhỏ là: $B_1B_2 = 2b = 6 \Rightarrow b = 3$

Vậy phương trình Elip là: $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9x^2 + 16y^2 = 144$

Câu 4: Cho (E) có hình chữ nhật cơ sở diện tích bằng 8, chu vi bằng 6 thì phương trình chính tắc là:

A. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$. B. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} 2a \cdot 2b = 8 \\ 2a + 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$. Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Câu 5: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho elip (E) có độ dài trục lớn bằng 12 và độ dài trục bé bằng 6. Phương trình nào sau đây là phương trình của elip (E)

A. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} = 1$. B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$. C. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$. D. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} = 0$.

Lời giải

Phương trình chính tắc của elip có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$

Ta có $a = 6, b = 3$, vậy phương trình của Elip là: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 6: Tìm phương trình chính tắc của Elip có tâm sai bằng $\frac{1}{3}$ và trục lớn bằng 6.

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$. B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$. C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. D. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Lời giải

Phương trình chính tắc của Elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$

Theo giả thiết: $e = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3c$ và $2a = 6 \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow c = 1$

Khi đó: $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 3^2 = b^2 + 1 \Leftrightarrow b^2 = 8 \Leftrightarrow b = 2\sqrt{2}$

Vậy phương trình chính tắc của Elip là: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Câu 7: Phương trình Elip có trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ và một tiêu điểm $F_1(-1; 0)$ là:

A. $4x^2 + 5y^2 = 20$. B. $4x^2 + 5y^2 = 12$. C. $5x^2 + 4y^2 = 20$. D. $5x^2 + 4y^2 = 12$.

Lời giải

Ta có: $2a = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow a = \sqrt{5}$ và $b^2 = a^2 - c^2 = \sqrt{5}^2 - 1^2 = 4$.

Vậy phương trình Elip có dạng: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 5y^2 = 20$.

Câu 8: Phương trình chính tắc của (E) có độ dài trục lớn bằng 8, trục nhỏ bằng 6 là

A. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ C. $9x^2 + 16y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$

Vậy phương trình chính tắc của (E) : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Câu 9: Phương trình chính tắc của (E) có tâm sai $e = \frac{4}{5}$, độ dài trục nhỏ bằng 12 là

A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$ B. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ C. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ D. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} e = \frac{4}{5} \\ 2b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5c = 4a \\ b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25c^2 = 16a^2 \\ b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25(a^2 - b^2) = 16a^2 \\ b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 6 \end{cases}$

Vậy phương trình của (E) : $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

Câu 10: Phương trình chính tắc của (E) có độ dài trục lớn bằng 6, tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn bằng $\frac{1}{3}$ là

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ C. $\frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{5} = 1$ D. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1$

Lời giải

Do độ dài trục lớn bằng 6 nên $2a = 6 \Rightarrow a = 3$.

Do tỷ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn bằng $\frac{1}{3}$ nên $\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3c \Rightarrow c = 1$.

Ta có: $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 1 = 8 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

Câu 11: Elip có hai đỉnh $(-3;0)$; $(3;0)$ và hai tiêu điểm $(-1;0)$ và $(1;0)$ có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$

Lời giải

Theo đề bài ta có $\begin{cases} a=3 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 8$.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

Vậy phương trình chính tắc của Elip đã cho là

Câu 12: Phương trình chính tắc của (E) có độ dài trục lớn gấp 2 lần độ dài trục nhỏ và tiêu cự bằng $4\sqrt{3}$ là

A. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{24} = 1$ **C.** $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{6} = 1$ **D.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

Lời giải

Do độ dài trục lớn gấp 2 lần độ dài trục nhỏ nên $2a = 2.2b \Rightarrow a = 2b$.

Do tiêu cự bằng $4\sqrt{3}$ nên $2c = 4\sqrt{3} \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$.

Ta có: $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = 4b^2 - 12 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Câu 13: Phương trình chính tắc của (E) có đường chuẩn $x + 4 = 0$ và tiêu điểm $F(-1; 0)$ là

A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$ **C.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ **D.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

Lời giải

Do đường chuẩn là $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ nên $\frac{a}{e} = 4 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} = 4 \Rightarrow a^2 = 4c$.

Do có tiêu điểm $F(-1; 0)$ nên $c = 1 \Rightarrow a = 2, b^2 = a^2 - c^2 = 3$.

Phương trình chính tắc của (E) là $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Câu 14: Phương trình chính tắc của (E) có tiêu cự bằng 6 và đi qua điểm $A(5; 0)$ là

A. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{16} = 1$ **C.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ **D.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Lời giải

Do (E) có tiêu cự bằng 6 nên $2c = 6 \Rightarrow c = 3$.

Do (E) đi qua điểm $A(5; 0)$ nên $a = 5 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$.

Phương trình chính tắc của (E) là $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

- Câu 15:** Elip có hai tiêu điểm $F_1(-1;0)$, $F_2(1;0)$ và tâm sai $e = \frac{1}{5}$ có phương trình là
- A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$. B. $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{25} = -1$. C. $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{25} = 1$. D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = -1$.

Lời giải

Phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)

Tiêu điểm $F_1(-1;0) \Rightarrow c = 1$

Tâm sai $e = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow a = 5c = 5 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 1 = 24$.

Vậy $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$.

- Câu 16:** Trong hệ trục tọa độ Oxy , một elip có độ dài trục lớn là 8, độ dài trục bé là 6 thì có phương trình chính tắc là.

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. B. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$. C. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

Lời giải

Độ dài trục lớn là 8 $\Rightarrow 2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$

Độ dài trục nhỏ là 6 $\Rightarrow 2b = 6 \Leftrightarrow b = 3$

Phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

- Câu 17:** Các đỉnh của Elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; ($a > b > 0$) tạo thành hình thoi có một góc ở đỉnh là 60° , tiêu cự của (E) là 8. Khi đó $a^2 + b^2 = ?$
- A. 16 . B. 32 . C. 64 . D. 128 .

Lời giải

Gọi hình thoi là $ABCD$ và $\angle A = 60^\circ$.

Tiêu cự là 8 $\Rightarrow a^2 - b^2 = 64$ (1) .

Mặt khác xét tam giác AOB vuông tại O có góc $\angle BAO = 30^\circ$ nên

$OB = OA \tan 30^\circ \Leftrightarrow b = a \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ thay vào phương trình (1)

ta được $\frac{2}{3}a^2 = 64 \Leftrightarrow a^2 = 96 \Rightarrow b^2 = 32$. Vậy $a^2 + b^2 = 128$.

Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xác định phương trình chính tắc của elip biết $A_1A_2 = 10$, $B_1B_2 = 6$ với A_1, A_2 là giao điểm của elip với trục Ox ; B_1, B_2 là giao điểm của elip với trục Oy .

- A.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ **C.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 0$ **D.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$.

$$A_1A_2 = 10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5; \quad B_1B_2 = 6 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

Phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xác định phương trình chính tắc của elip biết giao điểm của elip với các trục tọa độ là $A_1(3;0)$, $A_2(-3;0)$, $B_1(0;2)$, $B_2(0;-2)$.

- A.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ **C.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 0$ **D.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$.

Elip giao trục Ox tại $A_1(3;0)$, $A_2(-3;0) \Rightarrow a = 3$

Elip giao trục Oy tại $B_1(0;2)$, $B_2(0;-2) \Rightarrow b = 2$

Phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xác định phương trình chính tắc của elip biết một giao điểm của elip với trục Ox là $A_1(6;0)$, elip đi qua $M(0;\sqrt{32})$.

- A.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ **C.** $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{4} = 1$ **D.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 0$

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$.

Một giao điểm của elip với trục Ox là $A_1(6;0) \Rightarrow a = 6$

Elip đi qua $M(0;\sqrt{32}) \Leftrightarrow \frac{0}{a^2} + \frac{32}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 32$

Phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$.

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xác định phương trình chính tắc của elip biết elip đi qua $M(0;3)$ khi tổng khoảng cách từ một điểm trên elip tới hai tiêu điểm là $2\sqrt{34}$

- A. $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$. B. $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$. C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{34} = 1$. D. $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 0$.

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

$$M(0;3) \Leftrightarrow \frac{0}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 9$$

Elip đi qua

Tổng khoảng cách từ một điểm trên elip tới hai tiêu điểm là $2\sqrt{34} \Rightarrow 2a = 2\sqrt{34} \Rightarrow a = \sqrt{34}$.

Phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Elip có một tiêu điểm $F_1(-1;0)$ và khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm trên Elip bằng $2\sqrt{5}$. Phương trình chính tắc của Elip

- A. $4x^2 + 5y^2 = 20$. B. $4x^2 + 5y^2 = 12$. C. $5x^2 + 4y^2 = 20$. D. $5x^2 + 4y^2 = 12$.

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

Ta có: $2a = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow a = \sqrt{5}$ và $b^2 = a^2 - c^2 = \sqrt{5}^2 - 1^2 = 4$.

Vậy phương trình Elip có dạng: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 5y^2 = 20$.

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Elip (E) đi qua điểm $M(0;3)$. Biết khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm trên (E) bằng 8. Phương trình chính tắc của Elip

- A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{64} = 1$. D. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ và $M(0;3) \in (E) \Rightarrow b = 3$

Khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm trên (E) bằng 8 $\Rightarrow a = 4$.

Phương trình chính tắc của (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , Elip có hai tiêu điểm $F_1(-1;0)$, $F_2(1;0)$ và tổng khoảng cách từ mỗi điểm trên elip đến hai tiêu điểm bằng 10 có phương trình

- A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$ B. $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{25} = -1$ C. $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{25} = 1$ D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = -1$.

Lời giải

Phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)

Tiêu điểm $F_1(-1;0) \Rightarrow c = 1$.

Tổng khoảng cách từ mỗi điểm trên elip đến hai tiêu điểm bằng $10 \Rightarrow a = 5$.

Mà $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 1^2 = 24$ nên (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$.

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phương trình chính tắc của (E) có tiêu cự bằng 6 và đi qua điểm $A(5;0)$ là

- A. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1$ B. $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{16} = 1$ C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Lời giải

Phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)

Do (E) có tiêu cự bằng 6 nên $2c = 6 \Rightarrow c = 3$.

Do (E) đi qua điểm $A(5;0)$ nên $a = 5 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$.

Phương trình chính tắc của (E) là (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho đường cong (C) có phương trình $3x^2 + 4y^2 - 48 = 0$ và đường thẳng $d: x - 2y + 4 = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường cong (C) là một elip.

b) Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm M, N .

c) Nếu đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm M, N thì $MN > 3$.

d) Có 4 điểm trên (C) sao cho $3F_1M = F_2M$ với $F_1(-2;0), F_2(2;0)$

Lời giải

$$3x^2 + 4y^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

a) Đúng: Ta có

b) Đúng: Ta có $x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2y - 4$, thay vào phương trình của (C) ta được:

$$3(2y - 4)^2 + 4y^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow 16y^2 - 48y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = -4 \\ y = 3 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

c) Đúng: Tọa độ giao điểm của đường thẳng d và đường cong (C) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 - 48 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2y - 4)^2 + 4y^2 - 48 = 0 \\ x = 2y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 4 \\ y = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow M(-4; 0), N(2; 3)$$

$$\Rightarrow MN = 3\sqrt{5} > 3$$

$$3x^2 + 4y^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \Rightarrow a = 4, b = 2\sqrt{3}, c = 2 \Rightarrow F_1(-2; 0), F_2(2; 0)$$

d) Sai:

Gọi $M(x; y) \in (C)$

$$\begin{cases} 3MF_1 = MF_2 \\ MF_1 + MF_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MF_1 = 2 \\ MF_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)^2 + y^2 = 4 \\ (x - 2)^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ta có:

Vậy có 1 điểm thuộc (C) thỏa mãn điều kiện.

Câu 2: Cho elip $(E): x^2 + 4y^2 - 40 = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$.

b) (E) có các tiêu điểm $F_1(30; 0)$ và $F_2(-30; 0)$.

c) Tổng các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc elip tới hai tiêu điểm bằng $2\sqrt{10}$.

d) (E) có chu vi hình chữ nhật cơ sở bằng $6\sqrt{10}$.

Lời giải

a) Đúng: Cho elip $(E): x^2 + 4y^2 - 40 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$

b) Sai: Từ phương trình elip $(E): \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$ ta có $\begin{cases} a = 2\sqrt{10} \\ b = \sqrt{10} \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{30} \end{cases}$

Do đó (E) có các tiêu điểm $F_1(\sqrt{30}; 0)$ và $F_2(-\sqrt{30}; 0)$

c) Sai: Tổng các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc elip tới hai tiêu điểm bằng $2a = 2 \cdot 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$

d) Sai: (E) có $\begin{cases} a = 2\sqrt{10} \\ b = \sqrt{10} \end{cases}$ suy ra độ dài trục lớn $2a = 4\sqrt{10}$ và độ dài trục bé $2b = 2\sqrt{10}$.

Chu vi hình chữ nhật cơ sở là: $2(2a + 2b) = 2(4\sqrt{10} + 2\sqrt{10}) = 12\sqrt{10}$.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường elip biết $A_1A_2 = 10$, $B_1B_2 = 6$ với A_1, A_2 là giao điểm của elip với trục Ox ; B_1, B_2 là giao điểm của elip với trục Oy . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Phương trình chính tắc của elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
 b) Tiêu cự là 8.
 c) Độ dài trục bé là 6.
 d) Độ dài trục lớn là 5.

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$.

$$A_1A_2 = 10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5; \quad B_1B_2 = 6 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

Phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Ta có: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow 2c = 8$.

- a) Sai
 b) Đúng
 c) Đúng
 d) Sai

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phương trình chính tắc của (E) có tiêu cự bằng 6 và độ dài trục lớn là 10. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Phương trình chính tắc của elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
 b) Độ dài trục lớn là 4.
 c) Độ dài trục bé là 10.
 d) (E) đi qua điểm $C(0; 3)$.

Lời giải

Phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$

Do (E) có tiêu cự bằng 6 nên $2c = 6 \Rightarrow c = 3$.

Do (E) đi qua điểm $A(5;0)$ nên $a = 5 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$.

Phương trình chính tắc của (E) là $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Ta có: $b = 4 \Rightarrow 2b = 8$.

- a) Đúng
- b) Sai
- c) Sai
- d) Sai

Câu 5: Cho elip (E) biết tiêu cự bằng 6 và trục nhỏ bằng 8. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tiêu điểm $F_1(0;-3); F_2(0;-3)$.
- b) Độ dài trục lớn bằng 5.
- c) Tổng khoảng cách từ điểm thuộc Elip có hoành độ $x = 2$ đến hai tiêu điểm bằng 10.
- d) Phương trình Elip (E) là $16x^2 + 25y^2 = 400$.

Lời giải

a) Sai: Tiêu điểm $F_1(-3;0); F_2(3;0)$

b) Sai: Từ $\begin{cases} 2c = 6 \\ 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 4 \end{cases}$.

Ta có $a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow a = 5$ nên độ dài trục lớn bằng 10.

c) Đúng: Ta có: $MF_1 + MF_2 = 2a = 2.5 = 10$.

d) Đúng: Phương trình elip cần tìm $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400$.

Câu 6: Cho elip (E) có một tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3};0)$ và đi qua $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tiêu cự của elip bằng $2\sqrt{3}$.

b) Điểm $N\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ thuộc elip.

c) Độ dài $MF_1 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

d) Phương trình Elip (E) là $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Lời giải

a) Đúng: Tiêu cự là $F_1F_2 = 2\sqrt{3}$

b) Sai: Điểm $N\left(1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ đối xứng với M qua trục tung. Do đó $N\left(1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ thuộc Elip.

c) Sai: Ta có: $MF_1 = \sqrt{\left(1 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

d) Đúng: Phương trình chính tắc của elip có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$ (1)

Suy ra $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3} \Rightarrow a^2 - b^2 = 3$

$M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (E) \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1 \Leftrightarrow 4b^2 + 3a^2 = 4a^2b^2$ (2)

Giải hệ (1) và (2) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 4b^2 + 3a^2 = 4a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 3 + b^2 \\ 4b^2 + 3(3 + b^2) = 4(3 + b^2)b^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 3 + b^2 \\ 4b^4 + 5b^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases}$

Vậy phương trình elip là: $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

Câu 7: Trong mặt phẳng Oxy , cho elip (E) có $F_1(-3;0), F_2(3;0)$ lần lượt là hai tiêu điểm và có tâm sai $e = \frac{3}{5}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Elip (E) có tiêu cự bằng 6.

b) Elip (E) có độ dài trục lớn bằng 10.

c) Elip (E) có độ dài trục nhỏ bằng 4.

d) Phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Lời giải

a) Đúng: Elip (E) có $F_1(-3;0), F_2(3;0) \Rightarrow c = 3 \Rightarrow 2c = 6$.

b) Đúng: Elip (E) có tâm sai $e = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{3}{a} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow a = 5 \Leftrightarrow 2a = 10$.

c) Sai: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow 2b = 8$.

d) Đúng: Phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ cho hai elip, đường elip (E) có hai đỉnh $A(10;0)$ và $B(0;6)$. Đường elip (E') có tâm sai $e = \frac{4}{8}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình chính tắc của elip (E) là $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

b) (E) có các tiêu điểm $F_1(64;0)$ và $F_2(-64;0)$.

c) (E) có tiêu cự bằng 8.

d) (E') nhận $B(0;6)$ làm đỉnh thì phương trình chính tắc của (E') là: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{36} = 1$

Lời giải

a) Đúng: (E) có hai đỉnh $A(10;0)$ và $B(0;6)$ suy ra $a = 10$ và $b = 6$.

Do đó phương trình chính tắc của elip là: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

b) Sai: Có phương trình elip (E) : $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ ta có $\begin{cases} a = 10 \\ b = 6 \\ c = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \end{cases}$

(E) có các tiêu điểm $F_1(8;0)$ và $F_2(-8;0)$.

c) Sai: (E) có tiêu cự bằng $F_1F_2 = 2c = 2.8 = 16$

d) Sai: (E') nhận $B(0;6)$ làm đỉnh suy ra $b = 6$.

(E') có tâm sai $e = \frac{4}{8}$ suy ra ta có $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{8}$. Vì $a, c > 0$ nên ta có

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{16}{64} \Leftrightarrow 64c^2 - 16a^2 = 0$$

$$a^2 - c^2 = b^2 = 36$$

Ngoài ra ta có

$$\begin{cases} 16a^2 - 64c^2 = 0 \\ a^2 - c^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 48 \\ c^2 = 12 \end{cases}$$

Có hệ phương trình

Vậy phương trình chính tắc của (E') là $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$.

Câu 9: Cho elip (E) có một tiêu điểm $F_1(4;0)$, một đỉnh $A(5;0)$. Gọi M là điểm trên elip có tọa độ là các số dương. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Elip (E) có tiêu điểm còn lại là $F_2(0;-4)$.

b) Phương trình chính tắc của elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 0$.

c) Tổng các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc elip tới hai tiêu điểm bằng 25.

d) Để $\angle F_1MF_2 = 90^\circ$ thì M có tọa độ là $\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}; \frac{9}{4}\right)$.

Lời giải

a) Sai: elip (E) có tiêu điểm $F_1(4;0) \Rightarrow c = 4$

Do đó elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(4;0)$ và $F_2(-4;0)$

b) Sai: Elip có đỉnh $A(5;0)$ suy ra $a = 5$. Lại có $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$

Do đó phương trình chính tắc của elip là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

c) Sai: Tổng các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc elip tới hai tiêu điểm bằng $2a = 10$.

d) Đúng: Giả sử $M(x_M; y_M) \in (E) \Rightarrow \frac{x_M^2}{25} + \frac{y_M^2}{9} = 1 \quad (1)$

(E) có $c = 4$ suy ra có hai tiêu điểm $F_1(4;0)$ và $F_2(-4;0)$

Lại có: $\begin{cases} \overrightarrow{F_1M} = (x_M + 4; y_M) \\ \overrightarrow{F_2M} = (x_M - 4; y_M) \end{cases}$ Để $\angle F_1MF_2 = 90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = 0 \Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 = 16 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} \frac{x_M^2}{25} + \frac{y_M^2}{9} = 1 \\ x_M^2 + y_M^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M^2 = \frac{175}{16} \\ y_M^2 = \frac{81}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{5\sqrt{7}}{4} \\ y_M = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}; \frac{9}{4}\right)$

Câu 10: Một đường hầm xuyên qua núi có chiều rộng là 20m, mặt cắt đứng của đường hầm có dạng nửa elip. Biết elip có tiêu cự bằng 10m. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tiêu điểm của (E) là $F_1(-5;0); F_2(5;0)$.

b) Chiều cao của hầm là 8,66m

c) Phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$.

d) Chiều cao của đường hầm xuyên núi tại tiêu điểm của (E) là 5m

Lời giải

a) Đúng: Elip (E) có tiêu cự bằng 10m nên $2c = 10 \Rightarrow c = 5$ là $F_1(-5;0); F_2(5;0)$.

b) Đúng: Xét $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Vì chiều rộng của hầm là 20m nên elip cắt trục Ox tại hai điểm $A_1(-10;0), A_2(10;0)$ suy ra $a = 10$.

Khi đó: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3} \approx 8,66$ m.

c) Đúng: $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ có $a = 10 \Leftrightarrow a^2 = 100$ và $b = 5\sqrt{3} \Rightarrow b^2 = 75$.

Phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$

d) Sai: Phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$. Tại tiêu điểm của (E) thì M là điểm thuộc (E) ứng với chiều cao h của đường hầm ta có $M(5;h)$. Chiều cao của đường hầm xuyên núi tại tiêu điểm của (E) là $\frac{5^2}{100} + \frac{h^2}{75} = 1 \Rightarrow \frac{h^2}{75} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{h^2}{75} = \frac{3}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{225}{4} \Rightarrow h = \frac{15}{2}$ m.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Xét các điểm M, N lần lượt thuộc các tia Ox, Oy sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (E) . Tính độ dài ngắn nhất của MN

Lời giải

Gọi $M(m;0), N(0;n)$ với $m, n > 0 \Rightarrow MN^2 = m^2 + n^2$. Đường thẳng $MN: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.

Elip chính tắc $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi $a^2 A^2 + b^2 B^2 = C^2$.

Phương trình tiếp tuyến của elip chính tắc tại $M(x_0; y_0)$ là: $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$.

Đường thẳng MN tiếp xúc với Elip $(E) \Leftrightarrow \frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2} = 1$.

Khi đó ta có: $1 = \frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2} \geq \frac{(4+3)^2}{m^2 + n^2} \Rightarrow m^2 + n^2 \geq 49 \Rightarrow MN_{\min} = 7$.

Câu 2: Một cây cầu bê tông bắc qua con sông rộng 12 m, nhịp cuốn cầu có hình dạng nửa elip. Các kỹ sư đã thiết kế sao cho vị trí cao nhất của gầm cầu so với mặt nước là 4 m. Tính chiều cao của gầm cầu tại vị trí cách bờ 1,5 m.

Lời giải

Vì sông rộng 12 m nên tọa độ giao điểm giữa (E) với trục hoành Ox là $A_1(-6;0); A_2(6;0)$.

Mặt khác ở vị trí cao nhất của gầm cầu so với mặt nước là 4 m nên suy ra tọa độ giao điểm giữa elip với trục tung Oy là $B_1(0;4)$.

Giả sử $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Gọi M là điểm thuộc (E) ứng với chiều cao h của đường hầm ta có $M(4,5;h)$

Khi đó $\frac{4,5^2}{36} + \frac{h^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{h^2}{16} = \frac{7}{16} \Rightarrow h^2 = 7 \Rightarrow h = \sqrt{7} \approx 2,65$ m.

Câu 3: Cho đường elip có phương trình chính tắc $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ và điểm $A(3;0)$. Điểm B, C nằm trên (E) sao cho B, C đối xứng qua trục Ox và $\triangle ABC$ đều. Diện tích của tam giác ABC là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Hai điểm B, C đối xứng qua trục Ox . Giả sử $B(x_0; y_0), C(x_0; -y_0)$ với $y_0 > 0$.

B, C nằm trên $(E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{3} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + 3y_0^2 = 9$ và $(BC): x = x_0 \Rightarrow d(A, (BC)) = |3 - x_0|$.

Vì $A(3;0) \in Ox$, B, C đối xứng qua trục $\Rightarrow \triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \triangle ABC$ đều

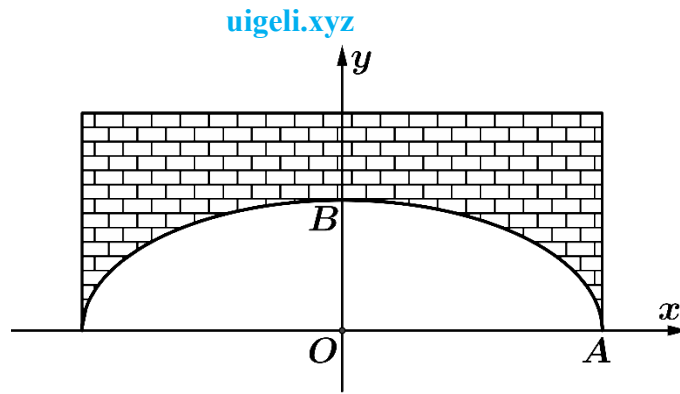
$$\Leftrightarrow d(A, (BC)) = \frac{\sqrt{3}}{2} BC \Leftrightarrow |3 - x_0| = \sqrt{3} y_0 \Leftrightarrow 3y_0^2 = (x_0 - 3)^2 \Rightarrow x_0^2 + (x_0 - 3)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = \sqrt{3} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot BA \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 0$ (loại).

Vậy diện tích của tam giác ABC bằng 5,2.

Câu 4: Một người kỹ sư thiết kế một đường hầm một chiều có mặt cắt là một nửa hình elip, chiều rộng của hầm là 12 m, khoảng cách từ điểm cao nhất của elip so với mặt đường là 3 m. Người kỹ sư này muốn đưa ra cảnh báo cho các loại xe có thể đi qua hầm. Biết rằng những loại xe tải có chiều cao 2,8 m thì có chiều rộng không quá 3 m. Tính độ cao y của điểm $M \in (E)$ có hoành độ 1,5.



Lời giải

Phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a > b > 0$.

Do các điểm $B(0;3)$ và $A(6;0)$ thuộc (E) nên thay vào phương trình của (E) ta có $b=3$ và $a=6$. Suy ra phương trình của (E) là $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Với những xe tải có chiều cao 2,8 m, chiều rộng của xe tải là 3 m, tương ứng với $x=1,5$.

Thay vào phương trình của elip để ta tìm ra độ cao y của điểm M (có hoành độ bằng 1,5 thuộc

(E)) so với trục Ox thì $y_M = 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_M^2}{16}} = 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{1,5^2}{16}} \approx 2,905 > 2,8$.

Câu 5: Một mái vòm nhà hát có mặt cắt là hình nửa elip. Cho biết khoảng cách giữa hai tiêu điểm là $F'F = 50$ m và chiều dài của đường đi của một tia sáng từ F' đến mái vòm rồi phản chiếu về F là 100 m. Tính tổng độ dài trục lớn và trục bé của elip.

Lời giải

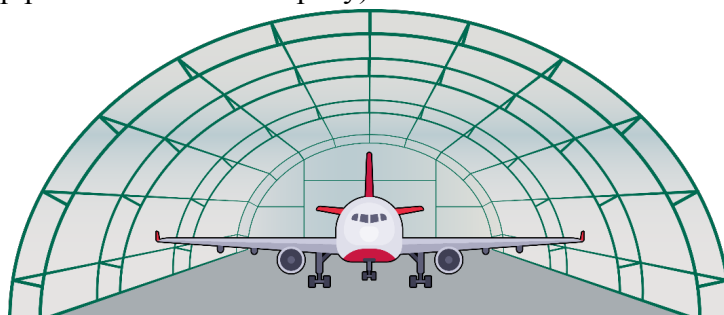
Ta có $F'F = 2c = 50$ suy ra $c = 25$.

Tổng khoảng cách $F'M + FM = 2a = 100$ suy ra $a = 50$.

Ta có: $b^2 = a^2 - c^2 = 50^2 - 25^2 = 1875$.

Vậy elip có phương trình $\frac{x^2}{2500} + \frac{y^2}{1875} = 1 \Rightarrow 2a + 2b = 5000 + 3750 = 8750$.

Câu 6: Một nhà vòm chứa máy bay có mặt cắt hình nửa elip cao 10 m và rộng 24 m. Tính khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường 4 m lên đến nóc nhà vòm. (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)



Chọn hệ tọa độ thích hợp và viết phương trình của elip nói trên.

Ta thấy AB là độ dài trục lớn của elip nên $2a = 24 \Leftrightarrow a = 12$

OC là một nửa trục bé nên $b = 10$

Khi đó phương trình của elip trên là: $\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{100} = 1 (*)$

Vậy phương trình elip đã cho là $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{100} = 1$.

Gọi điểm D là điểm nằm trên elip và cách chân tường 4m .

Khi đó khoảng cách từ D đến gốc tọa độ O là $12 - 4 = 8\text{m}$.

Gọi $D(8; y_D)$

Vì D thuộc elip trên nên tọa độ điểm D thỏa mãn phương trình $(*)$ ta có: $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{100} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{y_D^2}{100} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow y_D^2 = \frac{500}{9} \Leftrightarrow y_D = \frac{10\sqrt{5}}{3} \Rightarrow D\left(8; \frac{10\sqrt{5}}{3}\right)$$

Suy ra khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường 4m đến nóc nhà là

$$\text{tung độ của điểm } D \text{ là } \frac{10\sqrt{5}}{3} \approx 7,45(\text{m}).$$

Dạng 3: Phương trình đường Hypebol

Phương pháp: Cho Hypebol có phương trình: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a, b > 0$. Các yếu tố trong Hypebol:

■ Độ dài trục thực: $A_1A_2 = 2a$; độ dài trục ảo: $B_1B_2 = 2b$; độ dài tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$

■ Tọa độ các đỉnh $A_1(-a; 0)$ $A_2(a; 0)$,

■ Tiêu điểm $F_1(-c; 0)$ $F_2(c; 0)$.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong mặt phẳng Oxy , cho hypebol $(H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$. Tìm tiêu điểm của hypebol

Lời giải

$$\text{Ta có } (H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{5} \Rightarrow F_1(-\sqrt{5}; 0), F_2(\sqrt{5}; 0)$$

Bài tập 2: Có hai trạm phát tín hiệu vô tuyến đặt tại hai vị trí A, B cách nhau 300km . Tại cùng một thời điểm, hai trạm cùng phát tín hiệu với vận tốc $292\,000\text{ km/s}$ để một tàu thủy thu và đo độ lệch thời gian.

Tín hiệu từ A đến sớm hơn tín hiệu từ B là 0,0005 s. Từ thông tin trên, ta có thể xác định được tàu thủy thuộc đường hypebol nào? Viết phương trình chính tắc của hypebol đó theo đơn vị kilômet.

Lời giải

Do tín hiệu A đến sớm hơn tín hiệu từ B nên tàu thủy thuộc đường hepebol nhánh A.

Gọi vị trí tàu thủy là điểm M. Khi đó phương trình hyperbol có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Khi đó $|MA - MB| = 2a = 292000.0,0005 = 146 \text{ (km)} \Rightarrow a = 73$

Mặt khác $AB = 300 = 2c \Rightarrow c = 150$

Từ đó $b^2 = c^2 - a^2 = 17171$

Vậy phương trình hyperbol $\frac{x^2}{73^2} - \frac{y^2}{17171^2} = 1$.

Bài tập 3: Cho hypebol $4x^2 - 5y^2 = 20$. Tìm độ dài trục thực, trục ảo và tiêu cự.

Lời giải

Ta có $4x^2 - 5y^2 = 20 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{5} \\ b = 2 \end{cases}$ suy ra $2a = 2\sqrt{5}, 2b = 4, 2c = 6$.

Bài tập 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hypebol có phương trình $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ và M là một điểm thuộc hypebol có hoành độ bằng 12. Tính MF_1, MF_2 với F_1, F_2 là hai tiêu điểm.

Lời giải

$$\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = 4 \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right| = 19 \\ MF_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = 13 \end{cases}$$

Ta có

Bài tập 5: Trong mặt phẳng tọa độ, cho hypebol có phương trình: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Đường thẳng $y = 3$ cắt hybepol tại hai điểm A, B. Tính diện tích tam giác OAB.

Lời giải

Thay $y = 3$ vào phương trình $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ta được: $x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$.

Do đó đường thẳng $y = 3$ cắt hybepol tại hai điểm $A(-2\sqrt{2}; 3), B(2\sqrt{2}; 3)$.

Tam giác OAB cân tại O nên diện tích tam giác OAB: $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Bài tập 6: Trong mặt phẳng Oxy , cho hypebol (H) có phương trình: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Điểm $M(3a; 2a) \in (H)$ và điểm M thuộc góc phần tư thứ nhất. Tính diện tích tam giác MF_1F_2 .

Lời giải

Vì $M(3a; 2a) \in (H)$ nên ta được: $\frac{(3a)^2}{9} - \frac{(2a)^2}{16} = 1 \Leftrightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow a = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ mà

M nằm trong góc phần tư thứ nhất nên suy ra $M\left(2\sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

Diện tích tam giác MF_1F_2 bằng: $S = \frac{1}{2} \cdot F_1F_2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

Bài tập 7: Trong mặt phẳng tọa độ, cho Hypebol (H) đi qua điểm $M(4; \sqrt{5})$, có một tiêu điểm $F_1(-3; 0)$ và đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x$. Đường thẳng d cắt (H) tại hai điểm E, F . Tính độ dài đoạn EF .

Lời giải

Gọi phương trình của (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Vì $M(4; \sqrt{5}) \in (H)$ nên ta được: $\frac{16}{a^2} - \frac{5}{b^2} = 1$ (1).

Ta có $a^2 + b^2 = c^2$ mà $c = 3$ nên suy ra $b^2 = 9 - a^2$ (2).

Thay (2) vào (1) ta được $\frac{16}{a^2} - \frac{5}{9 - a^2} = 1 \Leftrightarrow a^4 - 30a^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 24 \\ a^2 = 6 \end{cases}$.

Mà $a^2 < 9$ nên suy ra $a^2 = 6 \Rightarrow b^2 = 3$ do đó $(H): \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$.

Tọa độ giao điểm của d và (H) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4y^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 3 \\ x = 2y \end{cases} \begin{cases} y = \pm\sqrt{3} \\ x = 2y \end{cases}$$

Suy ra $E(-2\sqrt{3}; -\sqrt{3}), F(2\sqrt{3}; \sqrt{3})$ $EF = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{15}$.

Bài tập 8: Trong mặt phẳng tọa độ, cho hypebol (H) có phương trình $9x^2 - 7y^2 = 63$ và đường thẳng $d: y = kx$. Tìm k để đường thẳng d và (H) có điểm chung.

Lời giải

Tọa độ giao điểm của d và (H) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 9x^2 - 7y^2 = 1 \\ y = kx \end{cases} \Rightarrow 9x^2 - 7k^2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2(9 - 7k^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9 - 7k^2} \quad (1)$$

Suy ra d và (H) có giao điểm thì phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow 9 - 7k^2 > 0 \Leftrightarrow k^2 < \frac{9}{7} \Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{7}} < k < \frac{3}{\sqrt{7}}$$

Bài tập 9: Trong mặt phẳng Oxy , cho hypebol $(H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$. Viết phương trình đường tròn tâm O bán kính OF_2

Lời giải

Ta có $OF_2 = c \Rightarrow R = \sqrt{5}$

Phương trình đường tròn trên là: $(x-0)^2 + (y-0)^2 = \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5$

Bài tập 10: Cho hypebol (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > 0, b > 0)$, đi qua các điểm $M(3; -2), N(-3\sqrt{3}; 4)$. Viết phương trình chính tắc của hypebol

Lời giải

Vì hypebol (H) đi qua các điểm $M(3; -2), N(-3\sqrt{3}; 4)$ nên

$$\begin{cases} \frac{3^2}{a^2} - \frac{(-2)^2}{b^2} = 1 \\ \frac{(-3\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{4^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 \cdot \frac{1}{a^2} - 4 \cdot \frac{1}{b^2} = 1 \\ 27 \cdot \frac{1}{a^2} - 16 \cdot \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{b^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình chính tắc của đường hypebol (H) là: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$. (*)

Bài tập 11: Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho hypebol có phương trình: $4x^2 - 5y^2 = 20$

a) Viết phương trình chính tắc của Hyperbol (H) là $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$.

b) Tính Hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm nằm trên hypebol tới hai tiêu điểm

c) $M \in (H)$ và $y_M = 2; x_M < 0$. Tính diện tích tam giác MF_1F_2

Lời giải

a) Ta có: $4x^2 - 5y^2 = 20 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{20} - \frac{5y^2}{20} = \frac{20}{20} \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5} \Rightarrow 2a = 2\sqrt{5}$

b) Ta có: $|MF_1 - MF_2| = 2a = 2\sqrt{5}$

$$M \in (H) \Rightarrow \frac{x_M^2}{5} - \frac{2^2}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_M = \sqrt{10} \\ x_M = -\sqrt{10} < 0 \end{cases} \Rightarrow x_M = -\sqrt{10} \Rightarrow M(-\sqrt{10}; 2)$$

c) Ta có:

$$S_{MF_1F_2} = \frac{1}{2} d(M; Ox) \cdot F_1F_2 = \frac{1}{2} \cdot |y_M| \cdot 2c = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$$

Bài tập 12: Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho phương trình chính tắc của (H) có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a, b > 0$, hypebol đi qua điểm $M(3\sqrt{2}; -4)$ và có một tiêu điểm là $F_2(5; 0)$. Viết phương trình chính tắc của (H) .

Lời giải

Do (H) có một tiêu điểm là $F_2(5; 0)$ nên ta có $c = 5 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 25 - b^2$

Vì (H) đi qua điểm $M(3\sqrt{2}; -4)$ nên ta có $\frac{(3\sqrt{2})^2}{a^2} - \frac{4^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{18}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1$

$$\text{Theo giả thiết, ta có hệ: } \begin{cases} a^2 = 25 - b^2 \\ \frac{18}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Đặt $t = b^2 > 0 \Rightarrow a^2 = 25 - t$ thay vào ta được $t^2 + 9t - 400 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 16 \\ t = -25 \end{cases}$;

Đổi chiếu với điều kiện $t > 0$ ta được $t = 16$ suy ra $b^2 = t = 16, a^2 = 25 - t = 9$.

Vậy phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tọa độ các tiêu điểm của hypebol $(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ là

A. $F_1 = (-5; 0); F_2 = (5; 0)$

B. $F_1 = (0; -5); F_2 = (0; 5)$

C. $F_1 = (0; -\sqrt{7}); F_2 = (0; \sqrt{7})$

D. $F_1 = (-\sqrt{7}; 0); F_2 = (\sqrt{7}; 0)$

Lời giải

Gọi $F_1 = (-c; 0); F_2 = (c; 0)$ là hai tiêu điểm của (H) .

Từ phương trình $(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$, ta có: $a^2 = 4$ và $b^2 = 3$

Suy ra $c^2 = a^2 + b^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}, (c > 0)$.

Vậy tọa độ các tiêu điểm của (H) là $F_1 = (-\sqrt{7}; 0); F_2 = (\sqrt{7}; 0)$.

Câu 2: Tọa độ các đỉnh của hypebol $(H): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ là

A. $A_1 = (-5; 0); A_2 = (5; 0)$

B. $A_1 = (0; -4); A_2 = (0; 4)$

C. $A_1 = (-4; 0); A_2 = (4; 0)$

D. $A_1 = (0; -5); A_2 = (0; 5)$

Lời giải

Từ phương trình $(H): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, ta có: $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5, (a > 0)$.

Gọi A_1 và A_2 là hai đỉnh của (H) .

Vậy tọa độ các đỉnh của (H) là $A_1 = (-5; 0); A_2 = (5; 0)$.

Câu 3: Phương trình chính tắc của hypebol (H) có một tiêu điểm là $(\sqrt{34}; 0)$ và độ dài trục thực bằng 10 là

A. $(H): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

B. $(H): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = -1$

C. $(H): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

D. $(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

Lời giải

Phương trình chính tắc của hypebol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > 0, b > 0)$, ta có một tiêu điểm là $(\sqrt{34}; 0)$ suy ra $c^2 = 34$. Độ dài trục thực $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5 \Leftrightarrow a^2 = 25$.

Ta có: $b^2 = c^2 - a^2 = 34 - 25 = 9$.

Vậy phương trình chính tắc của (H) là: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 4: Cho của hypebol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5} = 1$. Hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm nằm trên (H) đến hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối bằng bao nhiêu?

A. 8.

B. 16.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Gọi F_1 và F_2 là hai tiêu điểm của $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > 0, b > 0)$.

Điểm $M \in (H) \Leftrightarrow |MF_1 - MF_2| = 2a$.

Từ phương trình $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5} = 1$ suy ra $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4, (a > 0)$.

Vậy hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm M nằm trên (H) đến hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối là $|MF_1 - MF_2| = 2a = 8$.

Câu 5: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường hypebol?

- A. $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = -1$ B. $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ C. $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{5^2} = -1$ D. $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$

Lời giải

Phương trình chính tắc của hypebol có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > 0, b > 0$ nên các trường hợp D là phương trình chính tắc của đường hypebol.

Câu 6: Cho hypebol có phương trình: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1$. Tiêu cự của hypebol là:

- A. $2\sqrt{7}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có: $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$; $b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$

Khi đó: $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 12 = 28 \Rightarrow c = 2\sqrt{7} \Rightarrow 2c = 4\sqrt{7}$

Câu 7: Phương trình chính tắc của đường hypebol (H) có một tiêu điểm là $F_2(6;0)$ và đi qua điểm $A_2(4;0)$ là:

- A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ C. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$

Lời giải

Giả sử hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > 0, b > 0$.

Do $A_2(4;0)$ thuộc (H) nên $\frac{4^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1$, suy ra $a = 4$ mà $F_2(6;0)$ là tiêu điểm của (H) nên $c = 6$ suy ra $b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20$.

Vậy hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$.

Câu 8: Cho đường hypebol có phương trình $(H): 100x^2 - 25y^2 = 100$. Tiêu cự của hypebol đó là

- A. $2\sqrt{10}$ B. $2\sqrt{104}$ C. $\sqrt{10}$ D. $\sqrt{104}$

Lời giải

Hypebol $(H): 100x^2 - 25y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{4} = 1$ và $a = 10, b = 2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{104}$.
 Tiêu cự của hypebol là $2\sqrt{104}$.

- Câu 9:** Cho đường hypebol có phương trình $(H): 9x^2 - y^2 = 1$. Khoảng cách giữa hai tiêu điểm là
- A.** $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ **B.** 0 **C.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$ **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

$(H): 9x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{9}} - y^2 = 1$ và $a = \frac{1}{3}, b = 1 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$.
 Tiêu điểm: $F_1\left(-\frac{\sqrt{10}}{3}; 0\right), F_2\left(\frac{\sqrt{10}}{3}; 0\right)$. Khoảng cách giữa hai tiêu điểm là $F_1F_2 = \frac{2\sqrt{10}}{3}$.

- Câu 10:** Cho đường hypebol có phương trình $(H): 9x^2 - y^2 = 9$. Tiêu cự của hypebol đó là
- A.** $2\sqrt{10}$ **B.** $\sqrt{10}$ **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

$(H): 9x^2 - y^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ và $a = 1, b = 3 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$.
 Tiêu cự của hypebol là $2\sqrt{10}$.

- Câu 11:** Cho đường hypebol có phương trình $(H): 9x^2 - y^2 = 1$. Hai tiêu điểm của hypebol đó là

- A.** $F_1\left(-\frac{\sqrt{10}}{3}; 0\right), F_2\left(\frac{\sqrt{10}}{3}; 0\right)$ **B.** $F_1(-\sqrt{10}; 0), F_2(\sqrt{10}; 0)$
C. $F_1\left(0; -\frac{\sqrt{10}}{3}\right), F_2\left(0; \frac{\sqrt{10}}{3}\right)$ **D.** $F_1(0; -\sqrt{10}), F_2(0; \sqrt{10})$.

Lời giải

$(H): 9x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{9}} - y^2 = 1$ và $a = \frac{1}{3}, b = 1 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$.
 Tiêu điểm: $F_1\left(-\frac{\sqrt{10}}{3}; 0\right), F_2\left(\frac{\sqrt{10}}{3}; 0\right)$.

- Câu 12:** Cho Hypebol $(H): 3x^2 - 4y^2 = 12$. Gọi A là giao điểm của (H) với trục Ox , A có hoành độ dương tổng $AF_1 + AF_2$ bằng

- A.** $2\sqrt{7}$ **B.** $\sqrt{7}$ **C.** $4\sqrt{7}$ **D.** $8\sqrt{7}$.

Lời giải

Vì A là giao điểm của (H) với trục Ox thay $y = 0$ vào (H) ta được :

$3x^2 - 4 \cdot 0^2 = 12 \Leftrightarrow x = 2; x = -2$ suy ra $A(2; 0)$ (do A có hoành độ dương):

$$\overrightarrow{AF_1} = (-\sqrt{7} - 2; 0); \overrightarrow{AF_2} = (\sqrt{7} - 2; 0)$$

$$\Rightarrow AF_1 + AF_2 = \sqrt{(-\sqrt{7} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2} = \sqrt{7} + 2 + \sqrt{7} - 2 = 2\sqrt{7}$$

- Câu 13:** Trong mặt phẳng Oxy , cho hypebol $(H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc (H) với $x_0 > 0, y_0 > 0$ sao cho M nhìn các tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông. Phương trình đường tròn tâm O bán kính OF_2 là
- A.** $x^2 + y^2 = \sqrt{5}$. **B.** $x^2 + y^2 = 5$. **C.** $x^2 + y^2 = 25$. **D.** $x^2 + y^2 = 10$.

Lời giải

Ta có $OF_2 = c \Rightarrow R = \sqrt{5}$

Phương trình đường tròn trên là: $(x-0)^2 + (y-0)^2 = \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5$

- Câu 14:** Trong mặt phẳng Oxy , cho hypebol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Hai điểm F_1, F_2 là hai tiêu điểm (H) có tiêu cự bằng.
- A.** $\sqrt{10}$. **B.** 10 . **C.** 5 . **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow c = 5 \Rightarrow F_1(-5; 0), F_2(5; 0) \Rightarrow F_1F_2 = 10$

- Câu 15:** Trong mặt phẳng Oxy , cho hypebol có độ dài trục lớn và trục bé lần lượt là $2a, 2b$ ($a, b > 0$). Hai điểm F_1, F_2 là hai tiêu điểm. biết (H) đi qua điểm $M(3\sqrt{2}; -4)$ và có 1 tiêu điểm là $F_2(5; 0)$. (H) có phương trình
- A.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. **B.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **C.** $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$. **D.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$.

Lời giải

Vì (H) có 1 tiêu điểm là $F_2(5; 0) \Rightarrow c = 5 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25$ và $M(3\sqrt{2}; -4) \in (H) \Rightarrow \frac{18}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ \frac{18}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 25 - a^2 \\ \frac{18}{a^2} - \frac{16}{25 - a^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 25 - a^2 \\ 18(25 - a^2) - 16a^2 = a^2(25 - a^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 25 - a^2 \\ 450 - 34a^2 = 25a^2 - a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 25 - a^2 \\ a^4 - 59a^2 + 450 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 50 \\ a^2 = 9 \\ b^2 = 25 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 50, b^2 = -25 \text{ (ktm)} \\ a^2 = 9, b^2 = 16 \end{cases}$$

Vậy $(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

- Câu 16:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Hypebol (H) có phương trình chính tắc là: $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$.
Trên (H) lấy điểm M bất kì ta có $|MF_1 - MF_2|$ bằng
A. $\sqrt{6}$. **B.** 6. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** 12.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} a^2 = 6 \\ b^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{6} \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$. Vì $M \in (H)$ nên ta có $|MF_1 - MF_2| = 2a = 2\sqrt{6}$.

- Câu 17:** Cho hypebol (H) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hypebol Có tiêu cự là.
A. $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2}$. **B.** $c = 2\sqrt{a^2 + b^2}$. **C.** $c = 4\sqrt{a^2 + b^2}$. **D.** $2c = 4\sqrt{a^2 + b^2}$.

Lời giải

Sử dụng mối liên hệ giữa a, b, c trong phương trình chính tắc ta có $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Câu 18:** Cho hypebol (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > 0, b > 0)$, đi qua các điểm $M(3; -2), N(-3\sqrt{3}; 4)$.
Tiêu cự Hypebol (H) bằng
A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải

Vì hypebol (H) đi qua các điểm $M(3; -2), N(-3\sqrt{3}; 4)$ nên

$$\begin{cases} \frac{3^2}{a^2} - \frac{(-2)^2}{b^2} = 1 \\ \frac{(-3\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{4^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 \cdot \frac{1}{a^2} - 4 \cdot \frac{1}{b^2} = 1 \\ 27 \cdot \frac{1}{a^2} - 16 \cdot \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{b^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình chính tắc của đường hypebol (H) là: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$. (*)

Ta có $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 2} = \sqrt{5}$. Suy ra độ dài tiêu cự của hypebol là $2c = 2\sqrt{5}$,

- Câu 19:** Cho hypebol (H) có dạng: $(H): 16x^2 - 9y^2 = 144$. Tiêu điểm của Hypebol là:
A. $F_1(-4; 0), F_2(4; 0)$. **B.** $F_1(0; -4), F_2(0; 4)$.

C. $F_1(-2;0), F_2(2;0)$

D. $F_1(0;-2), F_2(0;2)$

Lời giải

Ta có $(H): 16x^2 - 9y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ do đó : $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$

Mặt khác $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.

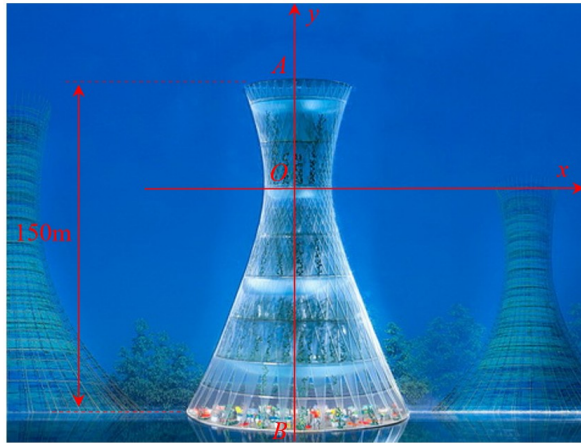
Vậy tiêu điểm của hypebol trên là $F_1(-5;0), F_2(5;0)$,

- Câu 20:** Cho hypebol (H) có dạng: $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Điểm nào sau đây thuộc Hypebol
- A. $(4;0)$. B. $(2;0)$. C. $(16;0)$. D. $(8;0)$.

Lời giải

Thay $A(4;0)$ vào phương trình (H) ta thấy thỏa mãn,

- Câu 21:** Tháp “Skyfarm” là một dạng nhà nhiều tầng hình hyperbol có phương trình $\frac{x^2}{28^2} - \frac{y^2}{42^2} = 1$, bên trong có thể làm từ nông nghiệp cho đến nuôi trồng thủy sản và năng lượng được thiết kế theo hướng tự cung cấp. Biết chiều cao của tháp là 150m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng $\frac{2}{3}$ khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy, tham khảo hình vẽ bên dưới.



Độ dài đoạn OB bằng

A. 100 m.

B. 50 m.

C. 80 m.

D. 90 m.

Lời giải

Theo đề bài ta có: $OA + OB = 150$ m mà $OA = \frac{2}{3}OB$ nên $OA = 60$ m và $OB = 90$ m.

- Câu 22:** Cho phương trình Hyperbol $(H): 4x^2 - 9y^2 = 36$. Độ dài trục thực bằng
- A. 6. B. 3. C. 9. D. 4.

Lời giải

$$4x^2 - 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36} \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 2a = 6$$

Ta có:

Câu 23: Trong hệ trục tọa độ Oxy , Hypebol có độ dài trục ảo và trục thực lần lượt là 8 và 10. Phương trình chính tắc của Hyperbol (H) là.

A. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$. B. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. C. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. D. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Lời giải

Độ dài trục ảo là $8 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$; độ dài trục thực là $10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$

Vậy phương trình chính tắc của hyperbol (H) là $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Câu 24: Cho hypebol (H) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. Tìm tiêu cự F_1F_2 của hypebol (H) .

A. $F_1F_2 = 3$. B. $F_1F_2 = 4$. C. $F_1F_2 = 8$. D. $F_1F_2 = 6$.

Lời giải

Từ phương trình chính tắc của (H) ta có $a^2 = 4, b^2 = 5$ nên $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$.

Vậy (H) có tiêu cự là $F_1F_2 = 2c = 2.3 = 6$.

Câu 25: Cho hypebol (H) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$. Tìm các tiêu điểm $F_1; F_2$ của hypebol (H) .

A. $F_1(-3;0), F_2(3;0)$. B. $F_1(-2;0), F_2(2;0)$.
C. $F_1(-4;0), F_2(4;0)$. D. $F_1(-16;0), F_2(16;0)$.

Lời giải

Từ phương trình chính tắc của (H) ta có $a^2 = 9, b^2 = 7$ nên $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 4$.

Vậy (H) có hai tiêu điểm là $F_1(-4;0), F_2(4;0)$.

Câu 26: Cho hypebol (H) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. Hiệu các khoảng cách từ một điểm nằm trên (H) tới hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối bằng bao nhiêu?

A. 5 . B. 10 . C. 4 . D. 8 .

Lời giải

Từ phương trình chính tắc của (H) ta có $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$.

Vậy hiệu các khoảng cách từ một điểm nằm trên (H) tới hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối bằng $2a = 2.5 = 10$.

- Câu 27:** Cho hypebol^(H) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm tiêu cự của hypebol^(H).
- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. 4. D. 6.

Lời giải

Từ phương trình chính tắc của^(H) ta có $a^2 = 1, b^2 = 1$ nên $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$.

Vậy^(H) có tiêu cự là $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{2}$.

- Câu 28:** Hypebol $7x^2 - 9y^2 = 63$ có tiêu cự bằng
- A. 8. B. 16. C. 4. D. 63.

Lời giải

Ta có: $7x^2 - 9y^2 = 63 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ suy ra $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 7 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \sqrt{7} \\ c = 4 \end{cases}$.

Vậy hypebol có tiêu cự là: $F_1F_2 = 2c = 8$.

- Câu 29:** Đường hypebol $4x^2 - y^2 = 16$ có một tiêu điểm là điểm nào dưới đây?
- A. $(2; 0)$. B. $(-2; 0)$. C. $(2\sqrt{3}; 0)$. D. $(2\sqrt{5}; 0)$.

Lời giải

Ta có: $4x^2 - y^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ suy ra $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 16 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = 2\sqrt{5} \end{cases}$.

Các tiêu điểm của hypebol là $(-2\sqrt{5}; 0)$ và $(2\sqrt{5}; 0)$.

- Câu 30:** Hiệu các khoảng cách từ một điểm bất kỳ nằm trên hyperbol $4x^2 - 9y^2 = 36$ tới hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối bằng

- A. 4. B. 6. C. 12. D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có $4x^2 - 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ suy ra $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 3$.

Hiệu các khoảng cách từ một điểm bất kỳ nằm trên hypebol tới hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối bằng $2a = 2.3 = 6$.

- Câu 31:** Cho điểm M nằm trên hypebol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Nếu hoành độ điểm M bằng 8 thì khoảng cách từ M đến các tiêu điểm của hypebol là

- A. $8 \pm 4\sqrt{2}$. B. $8 \pm \sqrt{5}$. C. 6 và 14. D. 5 và 13.

Lời giải

Với $x = 8$ ta có : $\frac{8^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm 3\sqrt{3}$.

Có hai điểm M thỏa mãn là $M_1(8; 3\sqrt{3})$ và $M_2(8; -3\sqrt{3})$.

Tiêu điểm của (H) là $F_1(-5; 0)$ và $F_2(5; 0)$ nên $M_1F_1 = M_2F_1 = 14$, $M_1F_2 = M_2F_2 = 6$.

Câu 32: Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường hypebol?

- A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. B. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = -1$. C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = -1$. D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$.

Lời giải

Phương trình chính tắc của đường hypebol là $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$.

Câu 33: Viết phương trình chính tắc của đường hypebol biết tiêu cự bằng 6 và độ dài trục thực $A_1A_2 = 2a = 4$.

- B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$. B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = -1$. C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Lời giải

Ta có tiêu cự $2c = 6 \Rightarrow c = 3$ và $a = 2$ và $c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 3 = \sqrt{2^2 + b^2} \Rightarrow b = \sqrt{5}$.

Phương trình chính tắc của đường hypebol là $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Câu 34: Viết phương trình chính tắc của đường hypebol (H) , biết tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5}; 0)$ và độ dài trục ảo $B_1B_2 = 2b = 4$.

- C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$. B. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$. C. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$. D. $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Lời giải

Ta có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5}; 0)$ suy ra $c = \sqrt{5}$.

Độ dài trục ảo $B_1B_2 = 2b = 4$ suy ra $b = 2$ và $c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \sqrt{5} = \sqrt{a^2 + 4} \Rightarrow a = 1$.

Phương trình chính tắc của đường hypebol là $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Câu 35: Viết phương trình chính tắc của đường hypebol (H) , biết tọa độ đỉnh $A_1(-5; 0)$ và tâm sai $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$.

- D. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} = 1$. B. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$. C. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$. D. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$.

Lời giải

Ta có đỉnh $A_1(-5;0)$ suy ra $a = 5$.

Từ giả thiết tâm sai $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow c = 5\sqrt{2}$ và $c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 + b^2} \Rightarrow b = 5$.

Phương trình chính tắc của đường hypebol là $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$.

Câu 36: Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình chính tắc của hypebol (H) biết (H) có một tiêu điểm là $F_2(3;0)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 .

- A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Lời giải

Giả sử hypebol (H) có phương trình là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

(H) cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ bằng $-2 \Rightarrow A(-2;0) \in (H) \Leftrightarrow \frac{4}{a^2} - 0 = 1 \Leftrightarrow a^2 = 4$

$F_2(3;0)$ là một tiêu điểm của $(H) \Rightarrow c = 3 \Leftrightarrow c^2 = 9 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 9 \Rightarrow b^2 = 5$.

Vậy phương trình hypebol (H) là $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Câu 37: Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình chính tắc của hypebol (H) biết (H) có tiêu cự bằng 8 và giá trị tuyệt đối của hiệu khoảng cách từ mỗi điểm thuộc (H) đến hai tiêu điểm của (H) bằng 6 .

- A. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ D. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Lời giải

Giả sử hypebol (H) có phương trình là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

Giá trị tuyệt đối của hiệu khoảng cách từ mỗi điểm thuộc (H) đến hai tiêu điểm bằng $6 \Rightarrow a = 3$

(H) có tiêu cự bằng $8 \Rightarrow 2c = 8 \Leftrightarrow c = 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 16 - 9 = 7$.

Vậy phương trình hypebol (H) là $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$.

Câu 38: Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình chính tắc của hypebol (H) biết (H) đi qua hai điểm $A(4\sqrt{2}; 2)$ và $B(-6; -\sqrt{5})$.

- A. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. B. $\frac{x^2}{31} - \frac{y^2}{31} = 1$. C. $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{12} = 1$. D. $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$.

Lời giải

Giả sử hypebol (H) có phương trình là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, b > 0)$.

$$A(4\sqrt{2}; 2) \in (H) \Leftrightarrow \frac{32}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \quad (1) \quad ; \quad B(-6; -\sqrt{5}) \in (H) \Leftrightarrow \frac{36}{a^2} - \frac{5}{b^2} = 1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{16} \\ \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

Từ . Vậy phương trình hypebol (H) là $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Câu 39: Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình chính tắc của hypebol (H) có một tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{10}; 0)$ và đi qua điểm $A(4; -\sqrt{2})$.

- A. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{6} = 1$. B. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$. C. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$. D. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{2} = 1$.

Lời giải

Gọi phương trình hypebol (H) là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, b > 0)$.

$$F_1(-\sqrt{10}; 0) \Rightarrow c = -\sqrt{10} \Leftrightarrow c^2 = 10 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 10 \Leftrightarrow b^2 = 10 - a^2 \quad (1)$$

$$A(4; -\sqrt{2}) \in (H) \Leftrightarrow \frac{16}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$\frac{16}{a^2} - \frac{2}{10 - a^2} = 1 \Leftrightarrow a^4 - 28a^2 + 160 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 20 \Rightarrow b^2 = -20 \text{ (loại)} \\ a^2 = 8 \Rightarrow b^2 = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình hypebol (H) là $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$.

Câu 40: Cho hypebol (H) có hai tiêu điểm $F_1; F_2$ nằm trên Ox và đối xứng qua gốc tọa độ O , (H) đi

- qua điểm $M\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}, \frac{9}{5}\right)$ và $\overline{F_1M} \perp \overline{MF_2} = 90^\circ$. Phương trình (H) có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tính $a.b$
- A. $a.b = 12$. B. $a.b = 15$. C. $a.b = 20$. D. $a.b = 10$.

Đặt $c = \sqrt{a^2 + b^2} = OF_1 = OF_2$ thì ta có $OM = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2} = 5$.

Mà $\angle F_1MF_2 = 90^\circ \Rightarrow F_1F_2 = 2OM = 10 \Rightarrow F_1(-5;0); F_2(5;0)$. Khi đó:

$MF_1 = \sqrt{50 + 8\sqrt{34}} = 4 + \sqrt{34}; MF_2 = \sqrt{50 - 8\sqrt{34}} = -4 + \sqrt{34} \Rightarrow |MF_1 - MF_2| = 8 = 2a \Rightarrow a = 4$.

Vậy $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \Rightarrow a.b = 12$.

Câu 41: Cho hypebol (H) có hai tiêu điểm $F_1; F_2$ nằm trên Ox và đối xứng qua gốc tọa độ O , (H) đi qua điểm M có hoành độ -5 và $MF_1 = \frac{9}{4}; MF_2 = \frac{41}{4}$. Phương trình đường hypebol (H) có dạng:

A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ C. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ D. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

Lời giải

Gọi phương trình đường hypebol (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $F_1F_2 = 2c$

Mặt khác: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ nên ta có $|MF_1 - MF_2| = 8 = 2a \Rightarrow a = 4$.

Gọi $M(-5; y); F_1(-c; 0); F_2(c; 0) \Rightarrow F_1M^2 = (c-5)^2 + y^2; F_2M^2 = (c+5)^2 + y^2$

$\Rightarrow F_1M^2 - F_2M^2 = -20c = -100 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow b^2 = 9$

Vậy $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Câu 42: Cho hypebol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ có hai tiêu điểm $F_1; F_2$ nằm trên Ox trong đó F_1 có hoành độ âm, cho điểm M nằm trên hypebol sao cho $\angle F_1MF_2 = 60^\circ$. Khi đó MF_2 có độ dài lớn nhất là m . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m \in (9; 10)$ B. $m \in (10; 11)$ C. $m \in (11; 12)$ D. $m \in (12; 13)$

Lời giải

Ta có $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 4; b = 3 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow F_1(-5; 0); F_2(5; 0); F_1F_2 = 10$

Để độ dài MF_2 max $\Rightarrow \begin{cases} MF_2 > MF_1 \\ MF_2 - MF_1 = 2a = 8 \Rightarrow MF_1 = MF_2 - 8 = m - 8 \end{cases}$

Ta có $\angle F_1MF_2 = 60^\circ \Rightarrow F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1.MF_2.\cos \angle F_1MF_2$.

$$\Rightarrow 100 = m^2 + (m-8)^2 - 2m(m-8).\cos 60^\circ \Rightarrow m^2 - 8m - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 - 2\sqrt{13} \\ m = 4 + 2\sqrt{13} \end{cases}$$

Vậy $m = 4 + 2\sqrt{13}$ (do $m > 0$).

Câu 43: Cho hypebol $(H): 9x^2 - 16y^2 = 144$ có hai tiêu điểm $F_1; F_2$ nằm trên Ox trong đó F_1 có hoành độ âm. Đường thẳng $\Delta: y = mx - 3m - 1$ cắt hypebol tại hai điểm thuộc 2 nhánh hypebol, M là giao điểm thuộc nhánh có hoành độ dương sao cho MF_2 ngắn nhất. Tìm m .

- A. $m = -\frac{1}{4}$. B. $m = 1$. C. $m = -\frac{1}{4}$. D. $m = -1$.

Lời giải

Ta có $(H): 9x^2 - 16y^2 = 144 \Leftrightarrow (H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 4; b = 3; c = 5 \Rightarrow \begin{cases} F_1(-5; 0); F_2(5; 0) \\ A_1(-4; 0); A_2(4; 0) \end{cases}$

Khi đó với mọi điểm M thuộc nhánh có hoành độ dương sao cho MF_2 ngắn thì $M \equiv A_2(4; 0)$.

Vậy $A_2 \in \Delta: 4m^2 - 3m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{4} \end{cases}$.

Thử lại:

Với $m = 1 \Rightarrow (\Delta)y = x - 4$, ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và hypebol là: $9x^2 - 16(x-4)^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 - 128x + 400 = 0$ có 2 nghiệm cùng dương nên loại.

Với $m = -\frac{1}{4} \Rightarrow (\Delta)y = \frac{1}{16}x - \frac{1}{4}$, ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và hypebol là: $9x^2 - 16\left(\frac{1}{16}x - \frac{1}{4}\right)^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow \frac{143}{16}x^2 + \frac{1}{2}x - 145 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu.

Vậy chọn $m = -\frac{1}{4}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy , cho hypebol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hypebol (H) có tọa độ tiêu điểm $F_1(-5; 0), F_2(5; 0)$.

- b) Hypebol (H) có độ dài trục thực bằng 16.
- c) Hypebol (H) có độ dài trục ảo bằng 4.
- d) Hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm nằm trên (H) đến hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối bằng 10.

Lời giải

- a) Đúng: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 \Rightarrow F_1(-5; 0), F_2(5; 0)$.
- b) Sai: Độ dài trục thực $2a = 2\sqrt{16} = 8$.
- c) Sai: Độ dài trục ảo $2b = 2\sqrt{9} = 6$.
- d) Sai: Hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm nằm trên (H) đến hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối là $|MF_1 - MF_2| = 2a = 8$.

Câu 2: Cho hypebol (H) có phương trình: $16x^2 - 9y^2 = 144$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hypebol (H) có hai tiêu điểm: $F_1(-5; 0), F_2(5; 0)$.
- b) Hypebol (H) có tiêu cự bằng 5.
- c) Hypebol (H) có hai điểm có hoành độ $x = 2$.
- d) Khi $-4 < k < 4$ thì đường thẳng $(d): y = kx$ có điểm chung với hypebol (H) .

Lời giải

- a) Đúng: Ta có $(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Do đó ta có: $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 16 \end{cases}$ nên $c^2 = a^2 + b^2 = 25$. Suy ra: $c = 5$.

Nên hypebol (H) có hai tiêu điểm: $F_1(-5; 0), F_2(5; 0)$.

- a) Sai: Vì tiêu cự: $F_1F_2 = 2c = 10$.

- c) Sai: Thay $x = 2$ vào phương trình $(H): 16 \cdot 2^2 - 9y^2 = 144 \Leftrightarrow y^2 = -\frac{80}{9}$ (vô nghiệm) nên hypebol đó không tồn tại điểm nào có hoành độ $x = 2$.

- d) Sai: Tọa độ giao điểm của hypebol (H) và đường thẳng $(d): y = kx$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = kx \\ 16x^2 - 9y^2 = 144 \end{cases} \text{ suy ra: } 16x^2 - 9k^2x^2 = 144 \Leftrightarrow (16 - 9k^2)x^2 = 144$$

Đường thẳng (d) cắt (H) khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm, tức là:

$$\begin{cases} 16 - 16k^2 \neq 0 \\ x^2 = \frac{144}{16 - 9k^2} \Leftrightarrow 16 - 9k^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < k < \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy , biết hypebol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có một tiêu điểm là $F_1(-3;0)$ và độ dài trục thực bằng 4. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hypebol (H) có tiêu cự bằng 6.
- b) Độ dài trục ảo của hypebol (H) là $2b = \sqrt{5}$.
- c) Phương trình chính tắc của hypebol (H) là $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.
- d) Hypebol (H) cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ lần lượt là $(4;0), (-4;0)$.

Lời giải

- a) Đúng: $F_1(-3;0)$ suy ra $c = 3 \Rightarrow 2c = 6$ nên tiêu cự bằng 6.
- b) Sai: $a = 2, c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 3 = \sqrt{2^2 + b^2} \Rightarrow b = \sqrt{5}$ nên độ dài trục ảo của hypebol (H) là $2b = 2\sqrt{5}$.
- c) Đúng: Theo trên ta có $a = 2, b = \sqrt{5}$ suy ra phương trình chính tắc của đường hypebol là $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.
- d) Sai: Hypebol (H) cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ lần lượt là $(2;0), (-2;0)$.

Câu 4: Trong mặt phẳng Oxy , gọi (H) là hypebol có một tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{10};0)$ và đi qua điểm $A(4;-\sqrt{2})$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tiêu điểm còn lại của hypebol (H) là $F_2(\sqrt{10};0)$.
- b) Hypebol (H) có tiêu cự bằng $\sqrt{10}$.
- c) Giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc hypebol (H) đến hai tiêu điểm bằng $4\sqrt{2}$.
- d) Phương trình chính tắc của hypebol (H) là $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$.

Lời giải

- a) Đúng: $F_1(-\sqrt{10};0) \Rightarrow c = \sqrt{10} \Rightarrow F_2(\sqrt{10};0)$

b) Sai: $F_1(-\sqrt{10}; 0) \Rightarrow c = \sqrt{10} \Rightarrow 2c = 2\sqrt{10}$ nên tiêu cự bằng $2\sqrt{10}$.

c) Đúng: Ta gọi phương trình hypebol (H) là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, b > 0)$.

$$F_1(-\sqrt{10}; 0) \Rightarrow c = \sqrt{10} \Leftrightarrow c^2 = 10 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 10 \Leftrightarrow b^2 = 10 - a^2 \quad (1)$$

$$A(4; -\sqrt{2}) \in (H) \Leftrightarrow \frac{16}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1 \quad (2) \text{ .Thay (1) vào (2) ta được:}$$

$$\frac{16}{a^2} - \frac{2}{10 - a^2} = 1 \Leftrightarrow a^4 - 28a^2 + 160 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 20 \Rightarrow b^2 = -10 \text{ (loại)} \\ a^2 = 8 \Rightarrow b^2 = 2 \end{cases}$$

$$a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2a = 4\sqrt{2} \Rightarrow |MF_1 - MF_2| = 2a = 4\sqrt{2}.$$

d) Đúng: Theo lời giải trên ta có $a^2 = 8; b^2 = 2$ nên phương trình hypebol (H) là $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$.

Câu 5: Cho Hyperbol (H) có một tiêu điểm $F_1(-4; 0)$ và độ dài trục ảo bằng $\sqrt{28}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình chính tắc của Hyperbol là $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$.

b) Độ dài trục thực bằng 6.

c) Tiêu cự của Hyperbol (H) là 4.

d) Điểm $B(3; 0)$ nằm trên Hyperbol (H) .

Lời giải

Phương trình chính tắc của heberbol (H) có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, b > 0)$.

Vì (H) có một tiêu điểm $F_1(-4; 0)$ nên $c = 4$

Độ dài trục ảo bằng $\sqrt{28}$ suy ra $2b = \sqrt{28} \Leftrightarrow b^2 = 7$

Mà $a^2 = c^2 - b^2 = 4^2 - 7 = 9$. Vậy phương trình Hyperbol (H) là: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$.

a) Sai:

b) Đúng: $a = \sqrt{9} = 3$ nên độ dài trục thực $2a = 6$.

c) Sai: Tiêu cự $2c = 8$.

d) Đúng: Đúng do $\frac{3^2}{9} - \frac{0^2}{7} = 1$ nên $B(3;0)$ nằm trên Hyperbol (H) .

Câu 6: Trong mặt phẳng toạ độ, cho hypebol có phương trình: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a = 2, b = 3$.

b) Hypebol có hai tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{13};0), F_2(\sqrt{13};0)$.

c) Điểm $M(5; y_M)$ với $y_M > 0$ nằm trên hypebol có tung độ $y_M = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

d) Đường thẳng $y = 3$ cắt hypebol tại hai điểm A, B . Diện tích tam giác OAB bằng $3\sqrt{2}$.

Lời giải

a) Đúng: $a^2 = 4, b^2 = 9 \Rightarrow a = 2, b = 3$.

b) Đúng: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \Rightarrow F_1(\sqrt{13};0), F_2(-\sqrt{13};0)$

c) Sai: Thay $x = 5, y = y_M$ vào phương trình $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ta được: $\frac{25}{4} - \frac{y_M^2}{9} = 1$ suy ra $y_M = \frac{3\sqrt{21}}{2} (y_M > 0)$

d) Sai: Thay $y = 3$ vào phương trình $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ta được: $x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$.

Do đó đường thẳng $y = 3$ cắt hypebol tại hai điểm $A(-2\sqrt{2};3), B(2\sqrt{2};3)$.

Tam giác OAB cân tại O nên diện tích tam giác OAB : $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Câu 7: Trong mặt phẳng toạ độ, cho hypebol (H) có phương trình: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a = 4$.

b) Điểm $M(-3;0)$ nằm trên hypebol.

c) Tiêu cự của (H) bằng 10.

d) Điểm $M(3a; 2a) \in (H)$ thuộc góc phần tư thứ nhất. Diện tích tam giác MF_1F_2 bằng $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

a) Sai: $a^2 = 9$ nên $a = 3$

b) Đúng: Thay $x = -3, y = 0$ vào phương trình $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ được $\frac{(-3)^2}{9} - \frac{0}{16} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ (đúng)

Do đó $M \in (H)$

c) Đúng: Ta có $a = 3, b = 4 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \Rightarrow 2c = 10$. Do đó tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 10$.

d) Sai: Vì $M(3a; 2a) \in (H)$ nên ta được:

$$\frac{(3a)^2}{9} - \frac{(2a)^2}{16} = 1 \Leftrightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow a = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

mà M nằm trong góc phần tư thứ nhất nên suy ra

$$S = \frac{1}{2} \cdot F_1F_2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

Diện tích tam giác MF_1F_2 bằng:

Câu 8: Trong mặt phẳng toạ độ, cho Hypebol (H) đi qua điểm $M(4; \sqrt{5})$, có một tiêu điểm $F_1(-3; 0)$

và đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tiêu cự của (H) bằng 6.

b) $|MF_2| = \sqrt{6}$.

c) Gọi A là một điểm tùy ý thuộc (H) . Khi đó A cách trục Oy một khoảng ngắn nhất bằng 4.

d) Đường thẳng d cắt (H) tại hai điểm E, F và $EF = 2\sqrt{15}$.

Lời giải

a) Đúng: Vì (H) có tiêu điểm $F_1(-3; 0)$ nên $c = 3$ suy ra tiêu cự $2c = 6$

b) Đúng: (H) có tiêu điểm $F_2 = (3; 0)$ nên $|MF_2| = \sqrt{(3-4)^2 + (0-\sqrt{5})^2} = \sqrt{6}$

c) Sai: Ta có $c = 3$ nên $d(A; Oy) < 3$

d) Đúng: Gọi phương trình của (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Vì $M(4; \sqrt{5}) \in (H)$ nên ta được: $\frac{16}{a^2} - \frac{5}{b^2} = 1$ (1)

Ta có $a^2 + b^2 = c^2$ mà $c = 3$ nên suy ra $b^2 = 9 - a^2$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được $\frac{16}{a^2} - \frac{5}{9-a^2} = 1 \Leftrightarrow a^4 - 30a^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 24 \\ a^2 = 6 \end{cases}$

Mà $a^2 < 9$ nên suy ra $a^2 = 6 \Rightarrow b^2 = 3$

Do đó (H): $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$

Tọa độ giao điểm của d và (H) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4y^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 3 \\ x = 2y \end{cases} \begin{cases} y = \pm\sqrt{3} \\ x = 2y \end{cases}$$

Suy ra $E(-2\sqrt{3}; -\sqrt{3}), F(2\sqrt{3}; \sqrt{3})$ $EF = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{15}$

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ, cho hypebol (H) có phương trình $9x^2 - 7y^2 = 63$ và đường thẳng $d: y = kx$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $b^2 = 9$.

b) Giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc hypebol đến hai tiêu điểm bằng $2\sqrt{7}$.

c) Hai tiêu điểm là $F_1(-4; 0), F_2(4; 0)$.

d) Có 5 giá trị nguyên của k để đường thẳng d và (H) có điểm chung.

Lời giải

a) Đúng: $9x^2 - 7y^2 = 63 \Leftrightarrow \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ nên suy ra $b^2 = 9$

b) Đúng: $a^2 = 7 \Leftrightarrow a = \sqrt{7}$ suy ra $|MF_1 - MF_2| = 2a = 2\sqrt{7}$

c) Đúng: $c^2 = a^2 + b^2 = 7 + 9 = 16 \Rightarrow c = 4$. Do đó hypebol có hai tiêu điểm $F_1(-4; 0), F_2(4; 0)$

d) Sai: Tọa độ giao điểm của d và (H) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 9x^2 - 7y^2 = 1 \\ y = kx \end{cases} \Rightarrow 9x^2 - 7k^2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2(9 - 7k^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9 - 7k^2} \quad (1)$$

Suy ra d và (H) có giao điểm thì phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow 9 - 7k^2 > 0 \Leftrightarrow k^2 < \frac{9}{7} \Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{7}} < k < \frac{3}{\sqrt{7}}$$

Vậy k nhận các giá trị nguyên $-1; 0; 1$ nên có ba giá trị của k .

Câu 10: Cho hypebol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tiêu cự của hypebol bằng 5
- b) Điểm $A(4; 3) \in (H)$
- c) Tiêu điểm của hypebol là $F_1(-5; 0), F_2(5; 0)$
- d) Trên (H) có 4 điểm M sao cho $MF_1 \perp MF_2$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4, b^2 = 9 \Rightarrow b = 3; c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5$

b) Sai: Thay tọa độ điểm $A(4; 3)$ vào phương trình $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, ta được $0 = 1$ (vô lý)

c) Đúng: Tiêu điểm: $F_1(-5; 0), F_2(5; 0)$

d) Đúng: Gọi $M(x_M; y_M) \in (H)$ và $MF_1 \perp MF_2$ nên $MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{c}{a}x_M\right)^2 + \left(a - \frac{c}{a}x_M\right)^2 = (2c)^2 \Leftrightarrow \left(4 + \frac{5}{4}x_M\right)^2 + \left(4 - \frac{5}{4}x_M\right)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow x_M^2 = \frac{544}{25} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -\frac{4\sqrt{34}}{5} \Rightarrow y_M = \pm \frac{9}{5} \Rightarrow M_1\left(-\frac{4\sqrt{34}}{5}; -\frac{9}{5}\right), M_2\left(-\frac{4\sqrt{34}}{5}; \frac{9}{5}\right) \\ x_M = \frac{4\sqrt{34}}{5} \Rightarrow y_M = \pm \frac{9}{5} \Rightarrow M_3\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}; -\frac{9}{5}\right), M_4\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}; \frac{9}{5}\right) \end{cases}$$

Có 4 điểm thỏa mãn yêu cầu:

$$M_1\left(-\frac{4\sqrt{34}}{5}; \frac{9}{5}\right), M_2\left(-\frac{4\sqrt{34}}{5}; -\frac{9}{5}\right), M_3\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}; -\frac{9}{5}\right), M_4\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}; \frac{9}{5}\right).$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Hypebol (H) có phương trình chính tắc là: $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$.

Trên (H) lấy điểm M bất kì. Tính $|MF_1 - MF_2|$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} a^2 = 6 \\ b^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{6} \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$ nên độ dài trục thực $2a = 2\sqrt{6}$, độ dài trục ảo $2b = 4\sqrt{2}$.
 Vì $M \in (H)$ nên ta có $|MF_1 - MF_2| = 2a = 2\sqrt{6}$.

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy , cho hypebol $(H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc (H) với $x_0 > 0, y_0 > 0$ sao cho M nhìn các tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông. Giá trị của biểu thức $T = 2\sqrt{5}x_0 + \sqrt{5}y_0$ bằng 10.

Lời giải

Điểm M nhìn các tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông $\Rightarrow$ Điểm M nằm trên đường tròn tâm O đường kính F_1F_2 . Ta có $OF_2 = c \Rightarrow R = \sqrt{5}$

Phương trình đường tròn trên là: $(x-0)^2 + (y-0)^2 = \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{9}{5} \\ y^2 = \frac{16}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3\sqrt{5}}{5} \\ b = \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases} \quad (\text{vì tọa độ điểm } M \text{ dương})$$

Vậy $T = 2\sqrt{5} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} + \sqrt{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = 10$.

Câu 3: Trong hệ trục tọa độ Oxy , Hypebol có độ dài trục ảo và trục thực lần lượt là 8 và 10. Điểm $M \in (H)$ và $y_M = 4; x_M < 0$. Tính MF_2 .

Lời giải

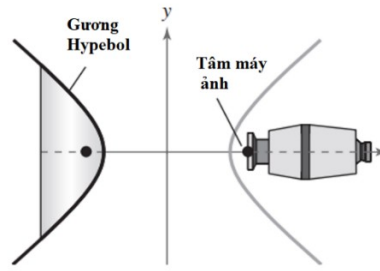
Độ dài trục ảo là $8 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$; độ dài trục thực là $10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$ nên phương

trình chính tắc của hyperbol (H) là $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

Ta có: $M \in (H) \Rightarrow \frac{x_M^2}{25} - \frac{4^2}{16} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_M = 5\sqrt{2} \quad (l) \\ x_M = -5\sqrt{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow x_M = -5\sqrt{2} \Rightarrow M(-5\sqrt{2}; 4)$;

$F_2(\sqrt{41}; 0)$; do đó $MF_2 = \sqrt{(\sqrt{41} + 5\sqrt{2})^2 + (4)^2} = \sqrt{95 + 10\sqrt{82}}$

Câu 4: Để chụp toàn cảnh, ta có thể sử dụng một gương hypebol. Máy ảnh được hướng về phía đỉnh của gương và tâm quang học của máy ảnh được đặt tại một tiêu điểm của gương (xem hình).



$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Phương trình cho mặt cắt của gương là $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. Tính khoảng cách từ quang tâm của máy ảnh đến đỉnh của gương. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Ta có
$$\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 41 \Rightarrow c = \sqrt{41}$$

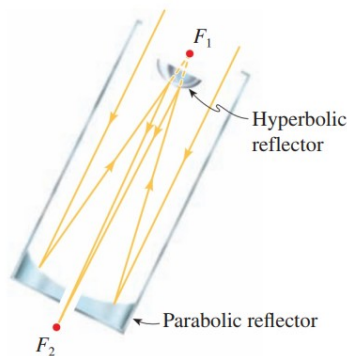
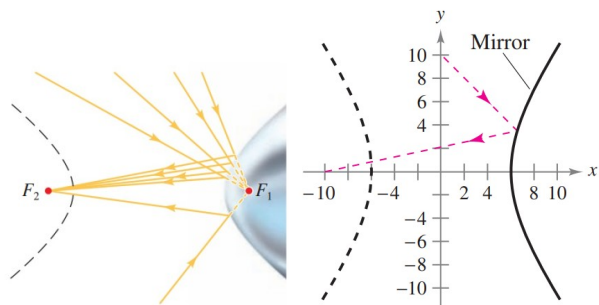
Tọa độ tiêu điểm của gương là $F_1(-\sqrt{41}; 0); F_2(\sqrt{41}; 0)$

Lại có $a = 5$ nên tọa độ đỉnh của gương là $A_1(-5; 0); A_2(5; 0)$

Vậy khoảng cách từ quang tâm của máy ảnh đến đỉnh của gương bằng

$$A_1F_2 = \sqrt{(-5 - \sqrt{41})^2 + 0^2} = 5 + \sqrt{41} \approx 11,4$$

Câu 5: Một gương hypebol (được sử dụng trong một số kính thiên văn) có tính chất là một tia sáng hướng vào tiêu điểm sẽ bị phản xạ sang tiêu điểm khác. Gương trong hình vẽ có phương trình $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$. Điểm $M(a; b)$ trên gương sẽ nhận được tia sáng đi qua điểm $(0; 10)$ và bị phản xạ sang tiêu điểm còn lại? (tham khảo hình vẽ). Tính $T = a + b$.



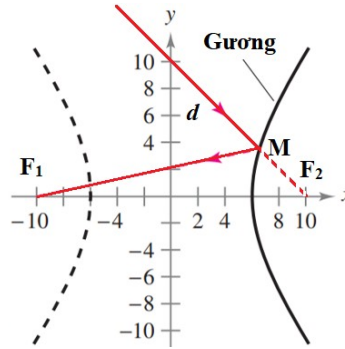
Lời giải

Gọi $(H): \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

Phương trình của gương (H) có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a = 6, b = 8$; suy ra $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10$.

Giả sử điểm cần tìm là $M \in (H)$

Gọi đường đi của ánh sáng qua điểm $(0;10)$ và M là d , do tia sáng sau khi phản xạ bởi gương sẽ đi qua tiêu điểm $F_1(-10;0)$, suy ra d nhằm vào tiêu điểm $F_2(10;0)$ ($F_2 \in d$).



Từ đây dễ dàng lập được phương trình của d là $y = -x + 10$.

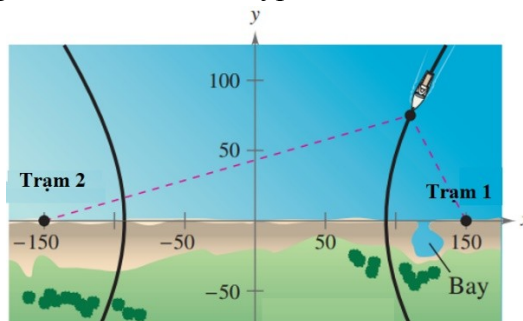
Tọa độ của $M \in (H)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = -x + 10 \\ \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 10 \\ 28x^2 + 720x - 5904 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx -32,25 \\ y \approx 42,25 \\ x \approx 6,54 \\ y \approx 3,46 \end{cases}$$

Do điểm cần tìm nằm ở nhánh bên phải nên ta có $M = (6,54; 3,55)$

Khi đó $a = 6,54; b = 3,55 \Rightarrow T = a + b = 10,09$

Câu 6: Điều hướng LORAN (điều hướng vô tuyến đường dài) cho máy bay và tàu thủy sử dụng các xung đồng bộ được truyền bởi hai trạm phát đặt cách xa nhau. Các xung này di chuyển với tốc độ ánh sáng (186.000 dặm / giây). Sự chênh lệch về thời gian nhận được phản xạ của các xung này từ một máy bay hoặc tàu thủy là không đổi, nên máy bay hoặc con tàu sẽ nằm trên một hyperbol có các trạm phát là các tiêu điểm. Giả sử rằng hai trạm phát, cách nhau 300 dặm, được đặt trên một hệ tọa độ vuông góc tại các điểm có tọa độ $(-150;0)$ và $(150;0)$ và một con tàu đang đi trên một con đường là một nhánh của hypebol và có tọa độ $(x;75)$ (xem hình vẽ).

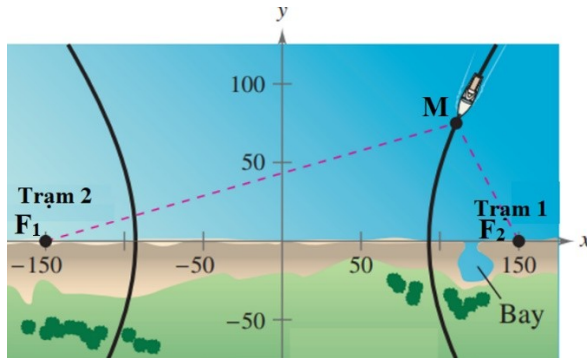


Tính gần đúng hoành độ của vị trí con tàu khi chênh lệch thời gian giữa các xung từ các trạm phát là 1000 micro giây (0,001 giây) (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân đầu tiên sau dấu phẩy)

Lời giải

Gọi đường đi của con tàu là (H) thì (H) có phương trình dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

Với giả thiết ta có các tiêu điểm của (H) là $F_1(-150;0)$, $F_2(150;0)$, suy ra $c = 150$



Giả sử vị trí con tàu hiện tại là $M(x; 75) \in (H)$; theo giả thiết độ chênh lệch thời gian giữa các xung từ các trạm phát là 1000 micro giây (0,001 giây), tức là:

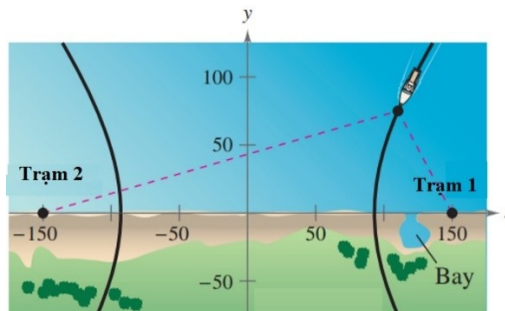
$$|MF_1 - MF_2| = 0,001 \cdot 186.000 = 186 \text{ (dặm)}; \text{ tức là ta có } 2a = 186 \Rightarrow a = 93;$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = 27\sqrt{19} \text{ nên phương trình } (H): \frac{x^2}{8649} - \frac{y^2}{13851} = 1.$$

$$\text{Ta có } M(x; 75) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{8649} - \frac{75^2}{13851} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 110,3 \\ x \approx -110,3 \end{cases}$$

Vậy hoành độ của con tàu gần bằng 110,3.

Câu 7: Điều hướng LORAN (điều hướng vô tuyến đường dài) cho máy bay và tàu thủy sử dụng các xung đồng bộ được truyền bởi các trạm phát đặt cách xa nhau. Các xung này di chuyển với tốc độ ánh sáng (186.000 dặm / giây). Sự chênh lệch về thời gian nhận được phản xạ của các xung này từ một máy bay hoặc tàu thủy là không đổi, nên máy bay hoặc con tàu sẽ nằm trên một hyperbol có các trạm phát là các tiêu điểm. Giả sử rằng hai trạm phát, cách nhau 300 dặm, được đặt trên một hệ tọa độ vuông góc tại các điểm có tọa độ $(-150;0)$ và $(150;0)$ và một con tàu đang đi trên một con đường là một nhánh của hypebol (xem hình vẽ).

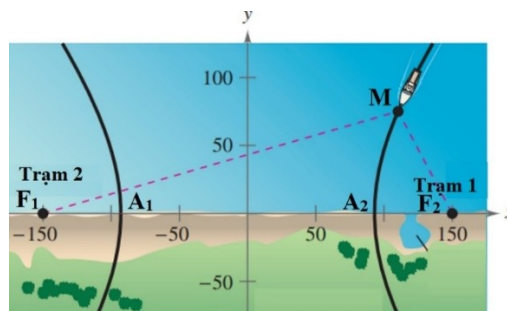


Biết rằng độ chênh lệch thời gian giữa các xung từ các trạm phát với con tàu là 1000 micro giây (0,001 giây). Xác định khoảng cách giữa tàu và trạm phát số 1 khi tàu vào bờ.

Lời giải

Gọi đường đi của con tàu là (H) thì (H) có phương trình dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

Với giả thiết ta có các tiêu điểm của (H) là $F_1(-150;0)$, $F_2(150;0)$, suy ra $c = 150$



Giả sử vị trí con tàu hiện tại là $M(x; y) \in (H)$; theo giả thiết độ chênh lệch thời gian giữa các xung từ các trạm phát là 1000 micro giây (0,001 giây), tức là:

$$|MF_1 - MF_2| = 0,001.186.000 = 186 \text{ (dặm)}; \text{ tức là ta có } 2a = 186 \Rightarrow a = 93;$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = 27\sqrt{19} \text{ nên phương trình } (H): \frac{x^2}{8649} - \frac{y^2}{13851} = 1.$$

Trạm phát số 1 nằm tại tiêu điểm $F_2(150;0)$, vị trí khi con tàu vào bờ là đỉnh của (H) là $A_2(93;0)$.

Vậy khoảng cách từ vị trí tàu vào bờ đến trạm số 1 là: $F_2A_2 = 150 - 93 = 57$ (dặm).

Câu 8: Một con tàu đang trên hành trình đi song song với một bờ biển thẳng và cách bờ 80 km. Hai trạm truyền tin S_1 và S_2 nằm trên bờ biển, cách xa nhau 220 km. Bằng cách tính giờ các tín hiệu vô tuyến từ hai trạm, hoa tiêu của tàu xác định rằng con tàu đang ở giữa hai trạm và ở gần S_2 hơn S_1 là 60 km. Tìm khoảng cách từ con tàu tới trạm S_2 . Đáp số làm tròn đến hai chữ số thập phân.

Lời giải

Gọi d_1 và d_2 là các khoảng cách tương ứng từ con tàu tới S_1 và S_2 , khi đó hiệu $d_1 - d_2 = 60$ và con thuyền phải nằm trên một hyperbol với tiêu điểm là S_1 và S_2 , hiệu hai khoảng cách cố định bằng 60.

Để đưa ra phương trình của hyperbol, ta biểu diễn hiệu cố định này bằng $2a$.

$$\text{Nhu vậy, ta có } c = 110, \quad a = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30, \quad b = \sqrt{110^2 - 30^2} = \sqrt{11200}.$$

$$\text{Phương trình của hyperbol này có dạng là } \frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{11200} = 1.$$

Thay $y = 80$ vào phương trình và giải theo x ta được:

$$\frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{11200} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{900} - \frac{80^2}{11200} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{3600}{7}$$

Do đó $x \approx 37,61$ (nghiệm âm bị loại, vì con tàu ở gần S_2 hơn S_1).

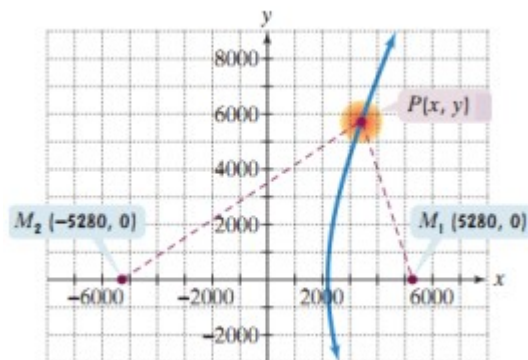
Khoảng cách từ con tàu đến S_1 bằng $d_1 = \sqrt{(37,61 + 110)^2 + 80^2} = \sqrt{28188,7121} \approx 167,89$ km.

Khoảng cách từ con tàu đến S_2 là $d_2 = \sqrt{(37,61 - 110)^2 + 80^2} = \sqrt{11640,3121} \approx 107,89$ km.

Câu 9: Một vụ nổ được hai micro M_1 và M_2 cách nhau 2 dặm ghi lại (1 dặm bằng 5280 feet). Micro M_1 nhận được âm thanh trước 4 giây so với micro M_2 . Giả sử âm thanh di chuyển với tốc độ 1100 feet/giây. Tập tất cả các điểm P xảy ra vụ nổ thỏa mãn các điều kiện trên là một hyperbol có phương trình dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với hai micro M_1 và M_2 là các tiêu điểm. Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu? (Đáp số a và b làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).

Lời giải

Ta bắt đầu bằng cách đặt micro trong một hệ tọa độ vuông góc. Bởi vì 1 dặm bằng 5280 feet nên ta đặt M_1 trên trục hoành cách gốc tọa độ 5280 feet về bên phải và đặt M_2 trên trục hoành cách gốc tọa độ 5280 feet về bên trái như hình vẽ minh họa hai micro cách nhau 2 dặm.



Ta biết rằng M_2 nhận được âm thanh sau 4 giây so với M_1 . Vì âm thanh di chuyển với tốc độ 1100 feet/giây nên hiệu số khoảng cách từ P (nơi xảy ra vụ nổ) tới M_2 và từ P tới M_1 là 4400 feet.

Tập tất cả các điểm P xảy ra vụ nổ thỏa mãn các điều kiện này là một hyperbol, với hai micro M_1 và M_2 là các tiêu điểm.

Như vậy, vị trí xảy ra vụ nổ nằm trên hyperbol có phương trình chuẩn là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ta có hiệu số khoảng cách giữa hai micro là 4400 feet và được đặt bằng $2a$, tức là

$$2a = 4400 \Rightarrow a = 2200 \text{ nên ta có } \frac{x^2}{2200^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ hay } \frac{x^2}{4840000} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mà khoảng cách từ gốc $O(0;0)$ tới tiêu điểm $M_2(-5280;0)$ hoặc $M_1(5280;0)$ đều bằng 5280.
Do đó $c = 5280$.

Sử dụng hệ thức $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{5280^2 - 2200^2} \approx 4800$.

Vậy $a + b = 2200 + 4800 = 7000$.

Câu 10: Hai tháp vô tuyến cách nhau 200 km được đặt dọc bờ biển với A nằm về phía Tây đối với B . Các tín hiệu vô tuyến được gửi đồng thời từ mỗi tháp tới một con tàu và tín hiệu ở B nhận được sớm hơn 500 micro giây trước tín hiệu ở A . Giả sử rằng các tín hiệu vô tuyến truyền đi với vận tốc 300 mét/micro giây và con tàu nằm về phía Bắc của tháp B thì tàu cách bờ biển bao xa? Đáp số làm tròn đến hai chữ số thập phân.

Lời giải

Theo đề bài con tàu nhận được tín hiệu từ B sớm hơn từ A 500 micro giây,

Vì âm thanh di chuyển với tốc độ 300 mét/micro giây nên hiệu số khoảng cách từ con tàu tới A và B là $500 \times 300 = 150000 = 150$ km.

Hiệu khoảng cách này là $2a = 150 \Rightarrow a = 75$.

Con tàu nằm trên một nhánh của hyperbol, với hai tháp vô tuyến A và B là hai tiêu điểm, A và B cách nhau 200 km, nghĩa là $2c = 200 \Rightarrow c = 100$.

Theo tính chất của hyperbol, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{100^2 - 75^2} = \sqrt{4375}$,

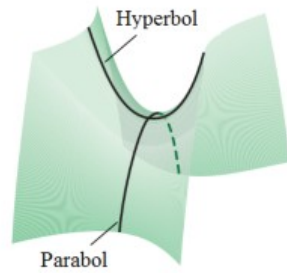
và phương trình chuẩn của hyperbol là $\frac{x^2}{5625} - \frac{y^2}{4375} = 1$.

Vì con tàu nằm về phía Bắc của tháp B , nghĩa là có hoành độ $x = c = 100$.

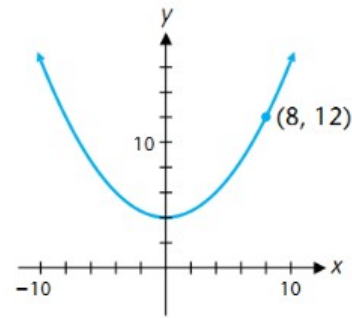
Thay $x = 100$ vào phương trình trên ta có $y \approx 58,33$.

Vậy tàu cách bờ biển $\approx 58,33$ km.

Câu 11: Một kiến trúc sư quan tâm đến việc thiết kế một mái vòm mỏng có hình dạng của hình Hyperbolic parabolid như hình 1. Tìm phương trình hypebol trong hệ trục tọa độ vẽ ở hình 2 và thỏa mãn các điều kiện đã chỉ ra. Hỏi điểm thuộc Hyperbol nằm cao hơn đỉnh $6(m)$ ở bên phải cách đỉnh bao xa? Kết quả tính toán được làm tròn tới hai chữ số thập phân.



Hình 1: Hyperbolic paraboloid.



Hình 2: Phần hyperbol của vòm.

Lời giải

Từ hình vẽ cho thấy hypebol có trục thực nằm dọc và $a = 4$. Phương trình chuẩn của hypebol có dạng $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. Điểm $(8; 12)$ nằm trên hypebol và $a = 4$ nên ta có: $\frac{12^2}{4^2} - \frac{8^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 8$

Phương trình của hypebol là $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{8} = 1$.

Điểm cao hơn đỉnh $6m$ có tung độ $y = 4 + 6 = 10$.

Thay vào phương trình Hyperbol ta có: $\frac{10^2}{16} - \frac{x^2}{8} = 1 \Rightarrow x \approx 6,48$ (vì điểm nằm bên phải đỉnh).

Điểm thuộc hypebol ở bên phải đỉnh có tọa độ $(6,48; 10)$.

Khoảng cách từ điểm này tới đỉnh $(0; 4)$ bằng: $\sqrt{(6,48 - 0)^2 + (10 - 4)^2} = \sqrt{78} \approx 8,83$ m.

Dạng 4: Phương trình đường Parabol

Phương pháp: Cho Parabol có phương trình: $y^2 = 2px$, với $p > 0$. Các yếu tố trong parabol:

- p gọi là tham số tiêu của parabol (P)
- Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ và đường chuẩn $\Delta: x = -\frac{p}{2}$.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho parabol $(P): y^2 = 4x$.

- a) Tính đường chuẩn của (P)
- b) Tính bán kính qua tiêu điểm của điểm $M(1; 2)$

a) Ta có đường chuẩn $x = -\frac{p}{2} = -1$

b) Bán kính qua tiêu điểm của điểm $M(1;2)$ là $FM = 1 + \frac{p}{2} = 2$.

Bài tập 2: Parabol $(P): y^2 = 6x$ cắt đường thẳng $(d): y = x + 1$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 18$.

Lời giải

Tọa độ giao điểm của $(P): y^2 = 6x$ và $(d): y = x + 1$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2 = 6x \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 6x \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{3} \\ y = 3 \pm \sqrt{3} \end{cases}. \text{ Do đó } x_1^2 + x_2^2 = (2 + \sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{3})^2 = 14$$

Bài tập 3: Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol $(P): y^2 = 2px (p > 0)$ đi qua điểm $M(3; 3\sqrt{2})$. Tính bán kính qua tiêu điểm của điểm $M(x; y)$.

Lời giải

Bán kính qua tiêu điểm của điểm $M(x; y)$ là $FM = x + \frac{p}{2} = x + \frac{3}{2}$

Bài tập 4: Cho parabol $(P): y^2 = 16x$. Trên (P) lấy hai điểm M, N sao cho độ dài đoạn thẳng MN qua tiêu điểm F của (P) . Tính khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường chuẩn Δ .

Lời giải

Ta có: $2p = 16 \Rightarrow p = 8 \Rightarrow \frac{p}{2} = 4 \Rightarrow$ tiêu điểm là $F(4; 0)$

Ta có đường chuẩn $x = -4$ nên khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn là 8.

Bài tập 5: Một sao chổi A chuyển động theo quỹ đạo có dạng là một parabol (P) nhận tâm Mặt Trời là tiêu điểm. Cho biết khoảng cách ngắn nhất giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời là khoảng 112 km. Tính khoảng cách giữa sao chổi $A(x; y)$ và tâm Mặt Trời.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ $O(0; 0)$ trùng với đỉnh của (P) và tiêu điểm F trùng với tâm Mặt Trời, đơn vị trên các trục là km.

Giả sử phương trình chính tắc của Parabol (P) có dạng $(P): y^2 = 2px (p > 0)$

Khoảng cách giữa sao chổi $A(x; y)$ và tâm Mặt Trời là $AF = x + \frac{p}{2}$.

Bài tập 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y^2 = 12x$. Điểm có tung độ bằng 12 nằm trên đồ thị của (P) , tìm hoành độ của điểm đó

Lời giải

Gọi điểm $M(x_0; 12) \in (P) \Rightarrow 12^2 = 12 \cdot x_0 \Leftrightarrow x_0 = 12$.

Bài tập 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y^2 = 6x$. Tính khoảng cách từ điểm $M(6; 36)$ đến phương trình đường chuẩn.

Lời giải

Phương trình đường chuẩn $\Delta: x + \frac{p}{2} = 0 \Rightarrow \Delta: x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \Delta: x = -\frac{3}{2}$.

Ta có $d(M, \Delta) = \left| 6 + \frac{3}{2} \right| = \frac{15}{2}$.

Bài tập 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có tiêu điểm $F(1; 0)$. Viết phương trình chính tắc của parabol là $y^2 = 4x$.

Lời giải

Phương trình chính tắc của parabol $y^2 = 2px \Rightarrow y^2 = 4x$.

Bài tập 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có đường chuẩn $\Delta: x + 1 = 0$. Viết phương trình chính tắc của parabol

Lời giải

Phương trình chính tắc của parabol là $y^2 = 2px \Rightarrow y^2 = 4x$.

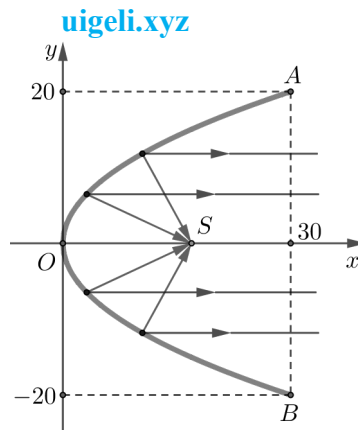
Bài tập 10: Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol, điểm đầu vào khúc cua là A điểm cuối là B , khoảng cách $AB = 400\text{m}$. Đỉnh parabol của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng 20m và cách đều A, B . Viết phương trình chính tắc của hypebol, với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1 m trên thực tế.

Lời giải

Phương trình chính tắc: $y^2 = 2px$

Do đi qua A nên suy ra $20^2 = 2p = -400 \Rightarrow p = -1$ nên $y^2 = -2x$.

Bài tập 11: Một chiếc đèn có mặt cắt ngang là hình parabol như hình bên. Hình parabol có chiều rộng giữa hai mép vành là $AB = 40\text{cm}$ và chiều sâu $h = 30\text{cm}$ (h bằng khoảng cách từ O đến AB). Bóng đèn nằm ở tiêu điểm S . Viết phương trình chính tắc của parabol đó.



Lời giải

Gắn hình parabol vào hệ trục như đề bài, dựa vào giả thiết bài toán ta có tọa độ điểm $A(30; 20)$.

Parabol đi qua điểm A

$$20^2 = 2p \cdot 30 \Leftrightarrow p = \frac{20}{3}$$

Nên ta có phương trình

Vậy ta có phương trình chính tắc của parabol đó là $y^2 = \frac{40x}{3}$.

Bài tập 12: Đường thẳng $d: y = kx, (k \neq 0)$ đi qua điểm O cắt $(P): y^2 = 16x$ tại điểm thứ hai là A . Tập hợp trung điểm của đoạn OA là parabol có phương trình là

Lời giải

Phương trình tung độ giao điểm của d và (P) là: $y^2 = \frac{16y}{k} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{16}{k} \end{cases}$.

Suy ra tọa độ điểm $A\left(\frac{16}{k^2}; \frac{16}{k}\right)$. Tọa độ $M\left(\frac{8}{k^2}; \frac{8}{k}\right)$.

Khi đó: $\begin{cases} x = \frac{8}{k^2} \\ y = \frac{8}{k} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y^2}{8}$ hay $y^2 = 8x$.

Vậy tập hợp điểm M là parabol $y^2 = 8x$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho parabol (P) có phương trình $y^2 = 4x$. Tọa độ tiêu điểm của parabol (P) là
A. $F(-1; 0)$ **B.** $F(1; 0)$ **C.** $F(0; 1)$ **D.** $F(0; -1)$.

Lời giải

Từ phương trình của parabol ta có $2p = 4 \Rightarrow p = 2$.

Suy ra parabol (P) có tiêu điểm là $F(1;0)$.

Câu 2: Cho Parabol $(P): y^2 = 2px (p > 0)$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. (P) có tiêu điểm $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$.
- B. (P) có phương trình đường chuẩn $\Delta: y = \frac{p}{2}$.
- C. (P) có tiêu điểm $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$.
- D. (P) có phương trình đường chuẩn $\Delta: x = -\frac{p}{2}$.

Lời giải

Theo tính chất của Parabol $(P): y^2 = 2px (p > 0)$.

Ta có (P) có tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ và có phương trình đường chuẩn $\Delta: x = -\frac{p}{2}$.

Câu 3: Cho Parabol $(P): y^2 = 16x$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. (P) có tiêu điểm $F(0; -4)$.
- B. (P) có tiêu điểm $F(-4; 0)$.
- C. (P) có tiêu điểm $F(0; 4)$.
- D. (P) có tiêu điểm $F(4; 0)$.

Lời giải

Từ phương trình của $(P): y^2 = 16x$ ta có: $2p = 16 \Leftrightarrow p = 8$.

Vậy (P) có tiêu điểm $F(4; 0)$.

Câu 4: Phương trình của parabol (P) biết parabol (P) có đỉnh là $I\left(\frac{1}{4}; -1\right)$ và đường chuẩn Δ có phương trình $6x - 8y + 3 = 0$ là

- A. $64x^2 + 36y^2 + 96xy = 0$.
- B. $64x^2 + 36y^2 + 96xy - 236x + 448y + 491 = 0$.
- C. $y^2 = 4x$.
- D. $64x^2 + 36y^2 - 236x - 448y + 491 = 0$.

Lời giải

Gọi P là hình chiếu của I lên Δ , ta có $P = \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. Gọi F là điểm sao cho I là trung điểm của PF thì F là tiêu điểm của parabol (P) và $F = (1; -2)$.

Với $M(x; y)$ thì $MF = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}$ và $d(M; \Delta) = \frac{|6x - 8y + 3|}{10}$.

$$M \in (P) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \frac{|6x-8y+3|}{10}$$

$$\Leftrightarrow 100(x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5) = 36x^2 + 64y^2 - 96xy + 36x - 48y + 9$$

$$\Leftrightarrow 64x^2 + 36y^2 + 96xy - 236x + 448y + 491 = 0$$

Câu 5: Phương trình chính tắc của parabol (P) có tiêu điểm là $F(5;0)$ là:

A. $y = 20x$

B. $y = 30x$

C. $y = 15x$

D. $y = 10x$

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 2px (p > 0)$.

Vì (P) có tiêu điểm là $F(5;0)$ nên $\frac{p}{2} = 5$, tức là $p = 10$. Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 20x$.

Câu 6: Cho parabol có phương trình: $4y^2 = 20x$. Phương trình đường chuẩn của parabol là:

A. $x = \frac{5}{4}$

B. $x = \frac{4}{5}$

C. $x = -\frac{4}{5}$

D. $x = -\frac{5}{4}$

Lời giải

Ta có: $(P): 4y^2 = 20x \Rightarrow 2p = 5 \Rightarrow p = \frac{5}{2}$.

Vậy (P) có phương trình đường chuẩn là: $\Delta: x = -\frac{5}{4}$.

Câu 7: Cho parabol $(P): y^2 = 4x$ và hai điểm $M(0;-4), N(-6;4)$. Tìm tọa độ điểm $A \in (P)$ sao cho ΔAMN vuông tại M ?

A. $A_1(16;8), A_2\left(\frac{16}{9}; -\frac{8}{3}\right)$

B. $A_1(16;9), A_2\left(\frac{16}{9}; -\frac{8}{3}\right)$

C. $A_1(16;8), A_2\left(\frac{16}{9}; -\frac{1}{3}\right)$

D. $A_1(16;8), A_2\left(\frac{15}{9}; -\frac{8}{3}\right)$

Lời giải

Gọi $A\left(\frac{t^2}{4}; t\right) \in (P)$; $\overline{MN} = (-6; 8)$, $\overline{MA} = \left(\frac{t^2}{4}; t+4\right)$.

ΔAMN vuông tại $M \Leftrightarrow \overline{MN} \cdot \overline{MA} = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}t^2 + 8t + 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t = -\frac{8}{3} \end{cases}$

Vậy có hai điểm cần tìm là $A_1(16;8), A_2\left(\frac{16}{9}; -\frac{8}{3}\right)$.

- Câu 8:** Cho parabol (P) có phương trình $y^2 = 6x$. Xác định đường chuẩn của parabol (P) là
- A. $x = -\frac{2}{3}$. B. $x = -\frac{1}{3}$. C. $x = \frac{-3}{2}$. D. $x = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Từ phương trình của parabol ta có $2p = 6 \Rightarrow p = 3$.

Suy ra parabol (P) có đường chuẩn là $x = \frac{-3}{2}$.

- Câu 9:** Cho parabol (P) có phương trình $4y^2 = x$. Tọa độ tiêu điểm của parabol (P) là
- A. $F\left(-\frac{1}{16}; 0\right)$. B. $F\left(\frac{1}{4}; 0\right)$. C. $F\left(\frac{1}{8}; 0\right)$. D. $F\left(\frac{1}{16}; 0\right)$.

Lời giải

Parabol (P) có phương trình $4y^2 = x \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{4}x$. Ta có $2p = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{8}$.

Suy ra parabol (P) có tiêu điểm là $F\left(\frac{1}{16}; 0\right)$.

- Câu 10:** Cho parabol (P) có phương trình đường chuẩn $x + \frac{1}{2} = 0$. Phương trình chính tắc của parabol (P) là

- A. $y^2 = 4x$. B. $y^2 = x$. C. $y^2 = \frac{1}{2}x$. D. $y^2 = 2x$.

Lời giải

Parabol (P) có phương trình đường chuẩn $x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} = -\frac{p}{2} \Rightarrow p = 1$.

Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 2x$.

- Câu 11:** Cho Parabol $(P): y^2 = 6x$. Chọn khẳng định đúng

- A. Phương trình đường chuẩn $x = -\frac{3}{2}$ và Oy là trục đối xứng.
- B. Phương trình đường chuẩn $x = \frac{3}{2}$ và Ox là trục đối xứng.
- C. Phương trình đường chuẩn $x = -\frac{3}{2}$ và tiêu điểm có tọa độ $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.
- D. Phương trình đường chuẩn $x = -\frac{3}{2}$ và tiêu điểm có tọa độ $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Lời giải

Từ phương trình ta có $2p = 6 \Leftrightarrow p = 3$

Parabol có phương trình đường chuẩn $x = -\frac{p}{2} = -\frac{3}{2}$ và tiêu điểm có tọa độ $\left(\frac{p}{2}; 0\right) = \left(\frac{3}{2}; 0\right)$, trục đối xứng là Ox

Câu 12: Cho Parabol $(P): y^2 = 4x$. Xét các khẳng định sau:

P “Parabol có phương trình đường chuẩn $x + 2 = 0$ ”

Q “Parabol có tọa độ tiêu điểm $F(2; 0)$,”

Chọn khẳng định đúng.

- A.** P đúng, Q sai. **B.** P sai, Q sai. **C.** P sai, Q đúng. **D.** P đúng, Q đúng.

Lời giải

Từ phương trình ta có $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$.

Parabol có phương trình đường chuẩn $x = -\frac{p}{2} = -1$ và tiêu điểm có tọa độ $\left(\frac{p}{2}; 0\right) = (1; 0)$

Câu 13: Cho Parabol $(P): 4y^2 = x$. Chọn khẳng định đúng

A. Phương trình đường chuẩn $x = -2$ và Oy là trục đối xứng.

B. Phương trình đường chuẩn $x = 2$ và Ox là trục đối xứng.

C. Phương trình đường chuẩn $x = -\frac{1}{4}$ và tiêu điểm có tọa độ $\left(\frac{1}{4}; 0\right)$.

D. Phương trình đường chuẩn $x = -\frac{1}{16}$ và tiêu điểm có tọa độ $\left(\frac{1}{16}; 0\right)$.

Lời giải

$(P): 4y^2 = x \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{4}x$. Ta có: $2p = \frac{1}{4} \Leftrightarrow p = \frac{1}{8}$ nên Parabol có phương trình đường chuẩn

$x = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{16}$ và tiêu điểm có tọa độ $\left(\frac{p}{2}; 0\right) = \left(\frac{1}{16}; 0\right)$, trục đối xứng là Ox

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y^2 = 6x$. Khoảng cách từ điểm $M(6; 36)$ đến phương trình đường chuẩn bằng

- A.** $\frac{15}{2}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** 15. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Phương trình đường chuẩn $\Delta: x + \frac{p}{2} = 0 \Rightarrow \Delta: x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \Delta: x = -\frac{3}{2}$.

Ta có $d(M, \Delta) = \left|6 + \frac{3}{2}\right| = \frac{15}{2}$.

Câu 15: Cho parabol $(P): y^2 = 2px$ biết rằng parabol có tiêu điểm $F(5;0)$. Phương trình chính tắc của Parabol đó là:

- A.** $y^2 = 5x$ **B.** $y^2 = \frac{5}{2}x$ **C.** $y^2 = 20x$ **D.** $y = 10x^2$

Lời giải

Do tọa độ tiêu điểm của (P) là $F(5;0)$ nên: $\frac{p}{2} = 5 \Rightarrow p = 10$.

Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 20x$.

Câu 16: Viết phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 2px$. Biết rằng khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường thẳng $\Delta: x + y - 12 = 0$ là $2\sqrt{2}$?

- A.** $y^2 = 16x$ hoặc $y^2 = 32x$ **B.** $y^2 = -16x$ hoặc $y^2 = 32x$
C. $y^2 = 32x$ hoặc $y^2 = 64x$ **D.** $y^2 = -32x$ hoặc $y^2 = 64x$

Lời giải

Gọi tọa độ tiêu điểm của (P) là $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Khoảng cách từ F đến Δ là $2\sqrt{2}$ nên: $d(F, \Delta) = \frac{\left|\frac{p}{2} - 12\right|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} p = 16 \\ p = 32 \end{cases}$.

Vậy phương trình chính tắc của (P) là: $y^2 = 32x$ hoặc $y^2 = 64x$.

Câu 17: Viết phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 2px$, biết rằng phương trình đường chuẩn của (P) là $x + 2 = 0$?

- A.** $y^2 = 8x$ **B.** $y^2 = 4x$ **C.** $y^2 = -8x$ **D.** $y^2 = -4x$

Lời giải

Do đường chuẩn của (P) là: $x + 2 = 0$ nên $\frac{-p}{2} = -2 \Rightarrow p = 4$.

Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 8x$.

Câu 18: Viết phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 2px$, biết rằng (P) cắt đường thẳng $\Delta: 3x - y = 0$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{10}$.

- A.** $y^2 = -18x$ **B.** $y^2 = 81x$ **C.** $y^2 = 9x$ **D.** $y^2 = 18x$

Lời giải

Ta có: $(3x)^2 = 2px$ luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi $p > 0$.

Tọa độ hai giao điểm là : $A(0;0), B\left(\frac{2p}{9}; \frac{2p}{3}\right)$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{2p}{9}\right)^2 + \left(\frac{2p}{3}\right)^2} = 2\sqrt{10} \Rightarrow p = 9$$

Khi đó :

Vậy phương trình chính tắc của (P) là : $y^2 = 18x$.

Câu 19: Viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường thẳng $\Delta : x + y - 12 = 0$ bằng $2\sqrt{2}$?

A. $y^2 = 32x$ hoặc $y^2 = 64x$.

B. $y^2 = 16x$ hoặc $y^2 = 32x$.

C. $y^2 = 24x$ hoặc $y^2 = 48x$.

D. $y^2 = 12x$ hoặc $y^2 = 24x$.

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

Ta có tọa độ tiêu điểm của parabol (P) là: $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Khoảng cách từ F đến đường thẳng Δ bằng $2\sqrt{2}$ nên:

$$d(F, \Delta) = \frac{\left|\frac{p}{2} - 12\right|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \left|\frac{p}{2} - 12\right| = 4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{2} - 12 = 4 \\ \frac{p}{2} - 12 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 32 \\ p = 16 \end{cases}$$

Vậy phương trình của (P) : $y^2 = 32x$ hoặc $y^2 = 64x$.

Câu 20: Phương trình chính tắc của parabol (P) biết một dây cung của (P) vuông góc với trục Ox có độ dài bằng 8 và khoảng cách từ đỉnh O của (P) đến dây cung này bằng 1 là

A. $y^2 = 16x$.

B. $y^2 = 32x$.

C. $y^2 = 24x$.

D. $y^2 = 12x$.

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 2px$.

Vì một dây cung của (P) vuông góc với trục Ox có độ dài bằng 8 và khoảng cách từ đỉnh O của (P) đến dây cung này bằng 1 nên điểm $A(1; 4) \in (P) \Rightarrow 16 = 2 \cdot p \cdot 1 \Rightarrow p = 8$
 $\Rightarrow (P): y^2 = 16x$

Câu 21: Phương trình chính tắc của parabol (P) biết (P) cắt đường thẳng $\Delta : 3x - y = 0$ tại 2 điểm $A; B$ sao cho $AB = 4\sqrt{2}$ là

A. $y^2 = \frac{16}{\sqrt{5}}x$.

B. $y^2 = \frac{36}{\sqrt{5}}x$.

C. $y^2 = \frac{32}{\sqrt{5}}x$.

D. $y^2 = \frac{18}{\sqrt{5}}x$.

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 2px$.

Ta thấy (P) luôn cắt đường thẳng Δ tại gốc tọa độ, giả sử $B \equiv O$ và A là giao điểm còn lại.

Ta có: $A \in \Delta \Rightarrow A(a; 3a)$.

$$AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 9a^2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{16}{5} \Rightarrow a = \pm \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Mặt khác:

Nếu $a = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left(3 \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2p \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow p = \frac{18}{\sqrt{5}} \Rightarrow (P): y^2 = \frac{36}{\sqrt{5}}x$.

Nếu $a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left(3 \cdot \frac{-4}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2p \cdot \left(\frac{-4}{\sqrt{5}}\right)$ không thỏa mãn điều kiện.

Câu 22: Phương trình chính tắc của parabol (P) biết (P) cắt elip $(E): 4x^2 + 6y^2 = 24$ tại 2 điểm $A; B$ sao cho $AB = 2$ là

A. $y^2 = \frac{\sqrt{2}}{6}x$.

B. $y^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}x$.

C. $y^2 = \frac{\sqrt{2}}{12}x$.

D. $y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

Do (E) và (P) có tính đối xứng và $AB = 2 \Rightarrow A(t; 1), B(t; -1)$, hai giao điểm nằm bên phải Oy nên $t > 0$.

$$A \in (E) \Rightarrow 4t^2 + 6 = 24 \Rightarrow t = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$A \in (P) \Rightarrow 1 = 2p \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{2}}{6} \Rightarrow (P): y^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}x$$

Câu 23: Tìm điểm M có tung độ dương nằm trên $(P): y^2 = 4x$ mà khoảng cách từ M đến tiêu điểm bằng 5.

A. $(2; 2)$.

B. $M(4; 4)$.

C. $(-2; 2)$.

D. $(-4; 4)$.

Lời giải

$(P): y^2 = 4x$ có tiêu điểm là $F(1; 0)$

Do $M \in (P)$ nên tọa độ M có dạng $M\left(\frac{a^2}{4}; a\right)$ ($a > 0$) (*)

$$MF = 5 \Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{4} - 1 \right)^2 + a^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -4 \end{cases}$$

Do

Do $a > 0$ nên $M(4;4)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24: Một đường thẳng d đi qua tiêu điểm F của $(P): y^2 = 2px$ và cắt (P) tại 2 điểm M, N . Tổng $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN}$ bằng

A. $\frac{1}{p}$.

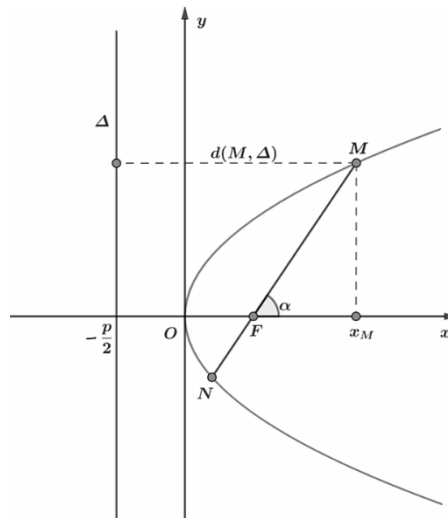
B. $\frac{2}{p}$.

C. p .

D. $2p$.

Lời giải

Gọi α là góc giữa $\overline{FM}$ và trục Ox .

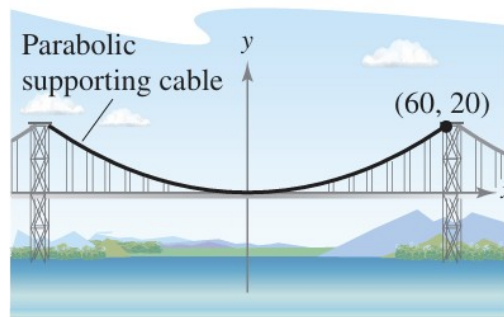


Ta có: $\cos \alpha = \frac{x_M - \frac{p}{2}}{FM} \Rightarrow 1 - \cos \alpha = \frac{FM - x_M + \frac{p}{2}}{FM}$

Khi đó: $FM = d(M, \Delta) = x_M + \frac{p}{2} \Rightarrow 1 - \cos \alpha = \frac{p}{FM}$ và $\frac{1}{FM} = \frac{1 - \cos \alpha}{p}$

Tương tự ta có: $\frac{1}{FN} = \frac{1 + \cos \alpha}{p}$ nên do đó $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{2}{p}$

Câu 25: Một cái cầu có dây cáp treo hình parabol, cầu dài 120 m và được nâng đỡ bởi những thanh thẳng đứng treo từ cáp xuống, thanh dài nhất là 20 m, thanh ngắn nhất là 8 m.



Phương trình chính tắc của Parabol là:

A. $y^2 = 9x$ B. $y^2 = \frac{20}{3}x$ C. $y^2 = 45x$ D. $y^2 = -\frac{10}{3}x$

Lời giải

Thay toạ độ điểm $M(60; 20)$ vào phương trình ta được $20^2 = 2 \cdot p \cdot 60 \Rightarrow p = \frac{10}{3}$.
Do $p = \frac{10}{3}$ nên phương trình chính tắc của Parabol là: $y^2 = \frac{20}{3}x$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho parabol $(P): y^2 = 2px (p > 0)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) (P) có tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

b) (P) có tọa độ trục đối xứng là Ox và phương trình đường chuẩn $\Delta: x = -\frac{p}{2}$.

c) Parabol $(P): y^2 = 2px$ có tiêu điểm $F(5; 0)$ thì phương trình chính tắc của parabol đó là $y^2 = 20x$.

d) Nếu khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường thẳng $\Delta: x + y - 12 = 0$ bằng $2\sqrt{2}$ thì phương trình chính tắc của parabol là $y^2 = 16x$ hoặc $y^2 = 32x$.

Lời giải

a) Đúng: Theo tính chất của parabol thì $(P): y^2 = 2px (p > 0)$ có tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

b) Đúng: $(P): y^2 = 2px (p > 0)$ có tọa độ trục đối xứng là Ox và phương trình đường chuẩn $\Delta: x = -\frac{p}{2}$.

c) Đúng: Tọa độ tiêu điểm của (P) là $F(5; 0)$ nên: $\frac{p}{2} = 5 \Rightarrow p = 10$.

Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 20x$.

d) Sai: Gọi tọa độ tiêu điểm của (P) là $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Vì khoảng cách từ F đến Δ là $2\sqrt{2}$ nên: $d(F, \Delta) = \frac{\left|\frac{p}{2} - 12\right|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} p = 16 \\ p = 32 \end{cases}$.

Vậy phương trình chính tắc của (P) là: $y^2 = 32x$ hoặc $y^2 = 64x$.

Câu 2: Cho parabol $(P): y^2 = 2px (p > 0)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) (P) có phương trình đường chuẩn $\Delta: y = -\frac{p}{2}$.
- b) Nếu (P) cắt đường thẳng $\Delta: 3x - y = 0$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{10}$ thì phương trình chính tắc của parabol $y^2 = 18x$.
- c) Một dây cung của (P) vuông góc với trục Ox có độ dài bằng 8 và khoảng cách từ đỉnh O của (P) đến dây cung này bằng 1 thì phương trình chính tắc của parabol là $y^2 = 16x$.
- d) Nếu (P) cắt đường thẳng $\Delta: 3x - y = 0$ tại 2 điểm A, B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$ thì phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = \frac{36}{\sqrt{5}}x$.

Lời giải

- d) Sai: Parabol $(P): y^2 = 2px (p > 0)$ có phương trình đường chuẩn $\Delta: x = -\frac{p}{2}$.
- b) Đúng: $(3x)^2 = 2px$ luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi $p > 0$.

Tọa độ hai giao điểm là: $A(0;0), B\left(\frac{2p}{9}; \frac{2p}{3}\right)$

Khi đó: $AB = \sqrt{\left(\frac{2p}{9}\right)^2 + \left(\frac{2p}{3}\right)^2} = 2\sqrt{10} \Rightarrow p = 9$

Vậy phương trình chính tắc của (P) là: $y^2 = 18x$.

- c) Đúng: Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 2px$.

Vì một dây cung của (P) vuông góc với trục Ox có độ dài bằng 8 và khoảng cách từ đỉnh O của (P) đến dây cung này bằng 1 nên điểm $A(1;4) \in (P) \Rightarrow 16 = 2 \cdot p \cdot 1 \Rightarrow p = 8$
 $\Rightarrow (P): y^2 = 16x$.

- d) Đúng: Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 2px$.

Ta thấy (P) luôn cắt đường thẳng Δ tại gốc tọa độ, giả sử $B \equiv O$ và A là giao điểm còn lại.

Ta có: $A \in \Delta \Rightarrow A(a; 3a)$.

Mặt khác: $AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 9a^2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{16}{5} \Rightarrow a = \pm \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Nếu $a = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left(3 \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2p \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow p = \frac{18}{\sqrt{5}} \Rightarrow (P): y^2 = \frac{36}{\sqrt{5}}x$.

Nếu $a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left(3 \cdot \frac{-4}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2p \left(\frac{-4}{\sqrt{5}}\right)$ không thỏa mãn điều kiện.

Câu 3: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P) có phương trình dạng chính tắc. Biết (P) qua $A(1;1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = x$.
- b) Tiêu điểm của (P) là $F\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.
- c) Đường chuẩn của (P) là $\Delta: x + \frac{1}{4} = 0$.
- d) Một điểm M nằm trên (P) có tung độ $y = -2$ thì $MF = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có phương trình chính tắc của (P) có dạng: $(P): y^2 = 2px (p > 0)$

Do (P) qua $A(1;1)$, suy ra $1^2 = 2p \cdot 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \Rightarrow (P): y^2 = x$.

b) Sai: Ta có tiêu điểm của (P) là $F\left(\frac{p}{2}; 0\right) \Rightarrow F\left(\frac{1}{4}; 0\right)$.

c) Đúng: Ta có đường chuẩn của (P) là $\Delta: x = -\frac{p}{2} \Rightarrow \Delta: x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \Delta: x + \frac{1}{4} = 0$.

d) Sai: Với $y = -2 \Rightarrow 4 = x \Rightarrow M(4; -2) \Rightarrow MF = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + (-2)^2} = \frac{17}{4}$.

Câu 4: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P) có phương trình dạng chính tắc. Biết (P) có tiêu điểm là $F(1;0)$.

a) Phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 2x$.

b) Đường chuẩn của (P) là $\Delta: x - 1 = 0$.

c) (P) qua $A(1;4)$.

d) Trong các dây cung của (P) qua tiêu điểm thì dây có độ dài nhỏ nhất là 4.

Lời giải

a) Sai: Ta có phương trình chính tắc của (P) có dạng: $(P): y^2 = 2px (p > 0)$

Do (P) có tiêu điểm của là $F(1;0) \Rightarrow \frac{p}{2} = 1 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow (P): y^2 = 4x$

b) Sai: Ta có đường chuẩn của (P) là $\Delta: x = -\frac{p}{2} \Rightarrow \Delta: x = -1 \Leftrightarrow \Delta: x+1 = 0$

c) Sai: Thay $A(1;4)$ vào $(P): y^2 = 4x \Rightarrow 4^2 = 4.1 \Rightarrow 16 = 4$ Vô lý vậy $A(1;4) \notin (P)$

d) Đúng: Ta có đường thẳng qua $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ có phương trình là: $(d): a\left(x - \frac{p}{2}\right) + by = 0$

Do đường thẳng cắt (P) tại hai điểm nên $a \neq 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow (d): x - \frac{p}{2} + by = 0$

Khi đó tọa độ giao điểm của $(d) \& (P)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ x - \frac{p}{2} + by = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 2p\left(-by + \frac{p}{2}\right) \Leftrightarrow y^2 + 2bpy - p^2 = 0(1)$$

Nhận thấy (1) luôn có hai nghiệm y_1, y_2 suy ra hai đầu dây cung của (P) có tọa độ là

$$M\left(-by_1 + \frac{p}{2}; y_1\right); N\left(-by_2 + \frac{p}{2}; y_2\right) \Rightarrow MN = \sqrt{b^2(y_2 - y_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \geq |y_2 - y_1|$$

Dấu bằng xảy ra khi $b = 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow y = \pm p \Rightarrow \min MN = |y_2 - y_1| = 2p = 4$

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ, cho parabol $(P): y^2 = 4x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tiêu điểm của (P) là $F(4;0)$.

b) (P) đi qua điểm $M(1;-2)$.

c) Đường thẳng $\Delta: y = x$ cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

d) M là điểm thuộc parabol (P) có tiêu điểm F . Khi đó đoạn MF ngắn nhất bằng 1.

Lời giải

a) Sai: $2p = 4 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow F(1;0)$

b) Đúng: Vì $M(1;-2) \in (P) \Leftrightarrow (-2)^2 = 4.1$

c) Đúng: Từ Δ Thay $x = y$ vào phương trình (P) ta có phương trình $y^2 = 4y \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 4 \end{cases}$

Với $y = 0 \Rightarrow x = 0$

Với $y = 4 \Rightarrow x = 4$ nên đường thẳng cắt (P) tại 2 điểm

$$M(x, y) \in (P) \Rightarrow MF = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{y^2}{4} - 1\right)^2 + y^2}$$

d) Gọi

$$MF^2 = \left(\frac{y^2}{4} - 1\right)^2 + y^2 = \frac{y^4}{16} + \frac{y^2}{2} + 1 \geq 1, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow MF \geq 1 \Rightarrow \min MF = 1$$

Ta có

Câu 6: Trong mặt phẳng toạ độ, cho parabol $(P): y^2 = 16x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tham số tiêu $p = 8$.

b) Tiêu điểm của (P) là $F(4;0)$.

c) Phương trình đường chuẩn Δ là $x = -4$.

d) M là điểm thuộc parabol (P) có hoành độ m . Khi đó $MF = 5$ khi và chỉ khi $m = 5$.

Lời giải

a) Đúng: $2p = 16$ suy ra tham số tiêu $p = 8$

b) Đúng: Tiêu điểm của (P) là $F(4;0)$

c) Đúng: Phương trình đường chuẩn Δ là $x = -4$

d) Vì $M \in (P) \Rightarrow MF = d(M, \Delta) \Rightarrow d(M, \Delta) = 5 \Leftrightarrow |m + 4| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -9 \end{cases}$

Câu 7: Trong mặt phẳng toạ độ, cho Parabol (P) có tiêu điểm $F\left(\frac{1}{4}; 0\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tham số tiêu $p = \frac{1}{2}$.

b) Phương trình đường chuẩn Δ là: $x - \frac{1}{4} = 0$.

c) Phương trình chính tắc của Parabol (P) là: $y^2 = x$.

d) Gọi A, B là giao điểm của (P) và $d: x - y - 2 = 0$, điểm $C \in (P)$ có tung độ nguyên m sao cho ΔABC cân tại A khi và chỉ khi $m = 2$.

Lời giải

a) Đúng: Vì $\frac{p}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

b) Sai: Vì đường chuẩn của (P) có phương trình $x = -\frac{p}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$ là phương trình đường chuẩn của (P) .

c) Đúng: Vì $\frac{p}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$. Vậy phương trình chính tắc của (P) là $(P): y^2 = 2px = 2 \cdot \frac{1}{2}x = x$

d) Vì $C \in (P) \Rightarrow C(m^2; m)$.

Thay $x = y^2$ vào phương trình $d: y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy $A(1; -1), B(4; 2)$

ΔABC cân tại $A \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow 18 = m^4 - 2m^2 + 1 + m^2 + 2m + 1$

$$\Leftrightarrow m^4 - m^2 + 2m - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \text{ (thỏa mãn)} \\ m \approx -2,24 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ, cho parabol $(P): y^2 - \sqrt{2}x = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường chuẩn Δ là $x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

b) Tiêu điểm của (P) là $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$.

c) Khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn Δ bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Nếu khoảng cách từ $A \in (P)$ (A có tung độ là số thực dương) đến đường chuẩn bằng 5 thì khoảng cách từ A đến trục hoành bằng 4.

Lời giải

a) Đúng: Vì $(P): y^2 - \sqrt{2}x = 0 \Leftrightarrow y^2 = \sqrt{2}x \Rightarrow 2p = \sqrt{2} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Đường chuẩn $x = -\frac{\sqrt{2}}{4} (\Delta)$

b) Sai: Vì $p = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow F\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right)$.

$$(\Delta): x + \frac{\sqrt{2}}{4} = 0, F\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right).$$

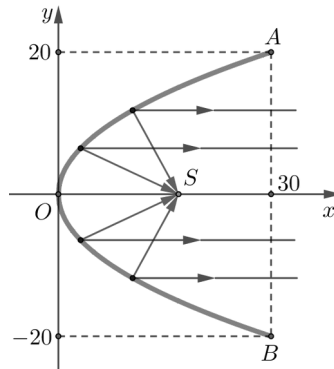
c) Đúng: Đường chuẩn

Vậy
$$d(F, \Delta) = \frac{\left|\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

d) Sai: Vì $A \in (P); d(A, \Delta) = 5 \Leftrightarrow \left|x_A + \frac{p}{2}\right| = 5 \Leftrightarrow x_A + \frac{p}{2} = 5 \Rightarrow x_A = 5 - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{20 - \sqrt{2}}{4}$

$$A \in (P) \Rightarrow y_A^2 = \sqrt{2} \cdot \frac{20 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow A\left(\frac{20 - \sqrt{2}}{4}; \sqrt{\frac{\sqrt{2}(20 - \sqrt{2})}{4}}\right) \Rightarrow d(A, Ox) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}(20 - \sqrt{2})}{4}}$$

Câu 9: Hình vẽ bên mô phỏng mặt cắt ngang của một chiếc đèn có dạng parabol trong mặt phẳng Oxy (đơn vị trên mỗi trục là cm). Hình parabol có chiều rộng giữa hai mép vành là $AB = 40$ cm và chiều sâu $h = 30$ cm (h bằng khoảng cách từ O đến AB). Bóng đèn nằm ở tiêu điểm S .



a) (P) đi qua điểm $A(30; 20)$.

b) Tiêu điểm của (P) là $F\left(\frac{20}{3}; 0\right)$.

c) Phương trình đường chuẩn Δ là $x = -\frac{10}{3}$.

d) Khoảng cách ngắn nhất từ 1 điểm trên (P) đến đường thẳng $d: x - 2y + 6 = 0$ bằng $\frac{22}{3\sqrt{5}}$.

Lời giải

a) Đúng: Gọi (P) có phương trình chính tắc là: $y^2 = 2px (p > 0)$.

Vì $AB = 40$ cm và $h = 30$ cm nên $A(30; 20)$

b) Sai: Vì $A(30; 20) \in (P) \Leftrightarrow (20)^2 = 2p \cdot 30 \Rightarrow p = \frac{20}{3}$ nên (P) có tiêu điểm $F\left(\frac{10}{3}; 0\right)$

c) Đúng: Ta có $P = \frac{20}{3}$, khi đó phương trình đường chuẩn là $x = -\frac{10}{3}$

d) Đúng: Gọi $M\left(\frac{3}{40}m^2; m\right) \in (P)$.

$$\text{Ta có } d(M; d) = \frac{\left|\frac{3}{40}m^2 - 2m + 6\right|}{\sqrt{5}} = \frac{|3m^2 - 80m + 240|}{40\sqrt{5}}.$$

$$d(M; d)_{\min} \Leftrightarrow \frac{1}{40\sqrt{5}} |3m^2 - 80m + 240|_{\min} = \frac{1}{40\sqrt{5}} \cdot \frac{|-880|}{3} = \frac{1}{40\sqrt{5}} \cdot \frac{880}{3} = \frac{22}{3\sqrt{5}}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 8x$. Gọi I là giao điểm của đường chuẩn với trục Ox , đường thẳng đi qua tiêu điểm F và vuông góc với trục Ox cắt (P) tại hai điểm lần lượt là M, N . Tính diện tích tam giác IMN .

Lời giải

Parabol (P) có tiêu điểm $F(2; 0)$ và đường chuẩn $\Delta: x + 2 = 0$.

Ta có $I(-2; 0)$ suy ra $IF = 4$

Đường thẳng d vuông góc với trục Ox và đi qua tiêu điểm F có phương trình $x = 2$.

$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases} \end{cases}$$

Toạ độ M, N là nghiệm của hệ

Suy ra, $M(2; -4), N(2; 4)$. Do đó, $MN = 8$.

Vì tam giác IMN cân tại I và F là trung điểm của MN nên diện tích tam giác IMN là

$$S = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot IF = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16.$$

Câu 2: Cho parabol $(P): y^2 = 4x$ và đường thẳng $d: 2x - y - 4 = 0$. Gọi A, B là giao điểm của d và (P) . Tìm tung độ dương của điểm $C \in (P)$ sao cho ΔABC có diện tích bằng 12.

Lời giải

Đường thẳng d cắt (P) tại $A(4; 4); B(1; -2)$ nên độ dài $AB = \sqrt{(1-4)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{45}$

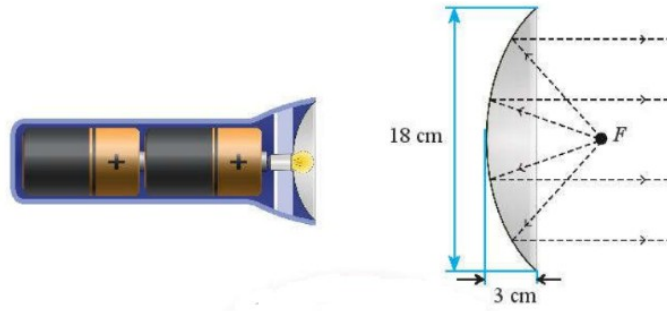
Điểm $C \in (P) \Rightarrow C(c^2; 2c)$

Diện tích tam giác ABC : $S_{ABC} = \frac{d_{(C;AB)} \cdot AB}{2} = \frac{d_{(C;d)} \cdot AB}{2} = 12$

$$\Leftrightarrow \frac{|2c^2 - 2c - 4| \cdot \sqrt{45}}{2 \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 12 \Leftrightarrow |c^2 - c - 2| = 4 \Rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy tung độ của điểm C dương là 6.

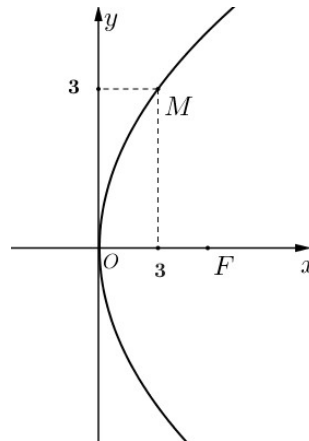
Câu 3: Một đèn pin có chóa đèn mặt cắt hình parabol với kính thước trong hình trên. Giấy tóc bóng đèn được đặt ở tiêu điểm F .



Để đèn chiếu được xa phải đặt bóng đèn cách đỉnh của chóa đèn bao nhiêu cm?

Lời giải

Viết phương trình chính tắc của parabol.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 2px (p > 0)$.

Khi đó $M(3;9) \in (P) \Rightarrow 9^2 = 2 \cdot p \cdot 3 \Leftrightarrow p = \frac{81}{6}$.

Vậy phương trình $(P): y^2 = \frac{81}{3}x$.

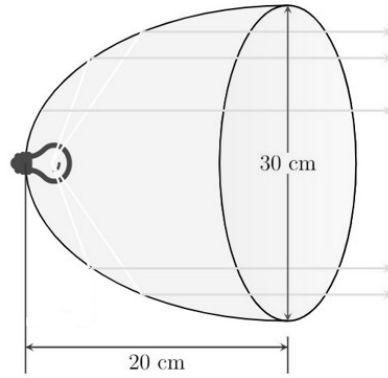
Parabol $(P): y^2 = \frac{81}{3}x$ có tiêu điểm $F\left(\frac{81}{12}; 0\right)$.

Để đèn chiếu được xa phải đặt bóng đèn ở vị trí tiêu điểm, khi đó các tia sáng phát ra từ bóng đèn chiếu lên bề mặt của chóa đèn sẽ phản xạ tạo nên các tia sáng song song hoặc trùng với trục của parabol.

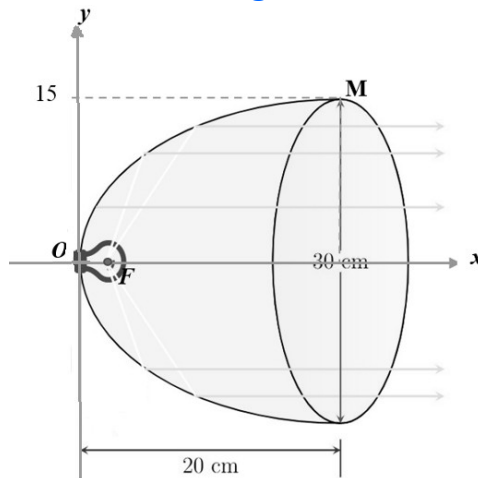
Vậy cần đặt bóng đèn cách đỉnh của chóa đèn $\frac{81}{12} = 6,75 \text{ cm}$.

Câu 4: Cho một cái đèn với chụp bóng đèn có mặt cắt qua trục là parabol với kích thước được thể hiện trên hình vẽ, giả sử xem dây tóc bóng đèn là một điểm và được đặt ở vị trí tiêu điểm của

parabol. Tính khoảng cách từ dây tóc bóng đèn tới đỉnh của chụp bóng đèn. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Gọi (P) là parabol, với (P) là mặt cắt qua trục của chụp bóng đèn và (P) thuộc mặt phẳng tọa độ Oxy .

Phương trình chính tắc của (P) : $y^2 = 2px$ ($p > 0$)

Theo đề bài, ta suy ra điểm $M(20;15) \in (P) \Rightarrow 15^2 = 2 \cdot p \cdot 20 \Rightarrow p = \frac{45}{8}$

Khoảng cách từ dây tóc bóng đèn tới đỉnh của chụp bóng đèn là: $OF = \frac{p}{2} = \frac{45}{16} \approx 2,81$ cm.

Câu 5: Khi du lịch đến thành phố Xanh Luis của Mỹ, ta sẽ thấy một cái cổng lớn có hình parabol hướng bề lõm xuống dưới, đó là cổng Acxơ. Khoảng cách giữa hai chân cổng là 162 m. Từ một điểm trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất là 43 m và vị trí đo trên mặt đất này đến chân cổng gần nhất là 10 m. Chiều cao của cổng bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân đầu tiên sau dấu phẩy)



Lời giải

Gọi chiều cao của cổng là $OH = h$ (với $h > 43$).

Khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB = 162$ suy ra $AH = 81$ nên do đó $A(h; 81)$.

Theo giả thiết, ta có $MI = 43$ và $AI = 10$.

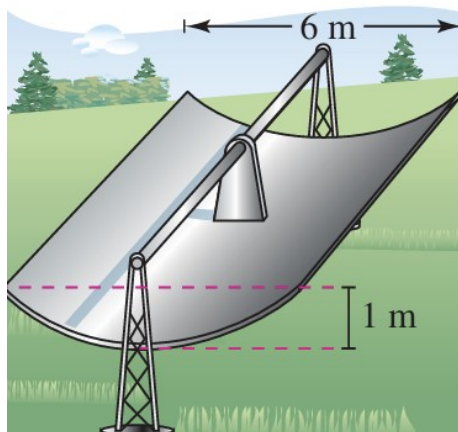
Suy ra $ME = OH - MI = h - 43$ và $MF = AH - AI = 81 - 10 = 71$ nên $M(h - 43; 71)$.

Giả sử, phương trình parabol có dạng $y^2 = 2px$. Vì parabol đi qua hai điểm A và M nên ta có

$$\begin{cases} 81^2 = 2ph \\ 71^2 = 2p(h - 43) \end{cases} \text{ suy ra } \frac{h}{h - 43} = \frac{81^2}{71^2} \Rightarrow h = \frac{81^2 \cdot 43}{81^2 - 71^2} \approx 185,6$$

Vậy chiều cao của cổng khoảng 185,6 mét.

Câu 6: Một bộ thu năng lượng mặt trời để làm nóng nước được làm bằng một tấm thép không gỉ có mặt cắt hình parabol (minh họa như hình vẽ dưới đây). Nước sẽ chảy thông qua một đường ống nằm ở tiêu điểm của parabol. Hỏi đường ống cách đỉnh bao xa?



Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol cần tìm là: $y^2 = 2px$ ($p \geq 0$)

Điểm $A(1; 3)$ thuộc parabol nên thay tọa độ điểm A vào phương trình trên ta được:

$$3^2 = 2 \cdot p \cdot 1 \Leftrightarrow p = \frac{9}{2}$$

Khi đó phương trình chính tắc của parabol là: $y^2 = 2 \cdot \frac{9}{2} \cdot x = 9x$

Tâm của đường ống chính là tiêu điểm của parabol.

Khi đó tọa độ tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right) = \left(\frac{9}{4}; 0\right)$

Vậy khoảng cách từ tâm đường ống đến đỉnh của parabol là $\frac{9}{4} = 2,25$ m.